

## ANÁLISE DOS MOMENTOS FLETORES OCASIONADOS POR CARGA LINEAR DE PAREDE EM LAJES MACIÇAS

*ANALYSIS OF BENDING MOMENT CAUSED BY LINEAR WALL LOADS ON SLABS*

**Danicler Bavaresco<sup>1</sup>, Luiz Antonio Soares de Souza<sup>2</sup>, Rafael Alves de Souza<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>Mestrando do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Estadual de Maringá, PR  
E-mail: engenheirobavaresco@gmail.com

<sup>2</sup>Professor Titular do Departamento de Engenharia Civil da Universidade Estadual de Londrina  
Rodovia Celso Garcia Cid, km 380, C. P. 6001, CEP: 86051-990 Londrina, PR  
E-mail: lasouza@uel.br

<sup>3</sup>Professor Titular do Departamento de Engenharia Civil da Universidade Estadual de Maringá  
Avenida Colombo, 5790, Bloco C67, 2º andar, Sala 219, Maringá, PR  
E-mail: rsouza@uem.br

### RESUMO

Atualmente a incidência de carregamento de paredes em lajes é cada vez mais frequente e não existe nenhum método de cálculo simplificado que determine os momentos fletores ocasionados por cargas de parede apoiadas diretamente em lajes armadas em duas direções. Com o objetivo de desenvolver uma formulação analítica, foram efetuadas simulações numéricas utilizando o Método dos Elementos Finitos, de maneira que os valores obtidos serviram de base para o desenvolvimento do presente método. Foram analisadas combinações de vinculação (engaste ou apoio simples), variações entre os vãos (razões entre 0,5 a 2,0) e variações da carga de parede aplicada. Os resultados foram validados a partir das simulações numéricas efetuadas e analiticamente pela formulação da Teoria de Placas considerando quatro bordos apoiados. O equacionamento proposto é simples, de fácil aplicação e apresenta resultados muito satisfatórios.

**Palavras-chave:** Lajes, Momento fletor, Método dos Elementos Finitos.

### ABSTRACT

Currently the incidence of wall loads on slabs is increasingly and there is no simplified method of calculation to determine the bending moments generated by this kind of load on two way slabs. In order to propose an analytical model for this problem, some numerical simulations using the finite element method have been applied, in a way that the numerical results served as basis for the development of the proposed method. It was analyzed all combinations of restrains for the supports (fixed or pinned), variations between the spans (rates of 0.5 to 2.0) and variations of the wall load on the slab. The results were validated using the numerical simulations and also the Theory of Plates for the configuration of four edges simply supported. The proposed equations are simple, easy to apply and presents very satisfactory results.

**Keywords:** Slabs, Bending moment, Finite Element Method.

### 1 – INTRODUÇÃO

Atualmente está se tornando comum nos pavimentos de edifícios a utilização de vãos cada vez maiores e em muitos casos são dispostas paredes de alvenaria diretamente sobre a laje (MAGALHÃES, 2001).

A busca por maior liberdade de *layout* dos ambientes externos e a modulação de painéis de laje é uma tendência que tem levado à redução no número de vigas, causando a ocorrência do apoio de paredes em lajes. Com isso há a necessidade de dimensionar essas placas para os acréscimos de momento fletor ocasionados pela carga linear introduzida.

De um modo geral, a análise e o dimensionamento de lajes são feitos por procedimentos numéricos por meio de teoria clássica (Teoria de Czern, Teoria de Marcus ou Teoria de Grelha) ou métodos mais avançados com uso de programas computacionais que utilizam, por exemplo, método dos elementos finitos. Quando da existência de cargas lineares é possível fazer o lançamento do carregamento nos *softwares*, obtendo assim os esforços

resultantes, possibilitando ao engenheiro a racionalização das armaduras utilizadas nesses elementos. Entretanto, quando não há disponibilidade deste tipo de ferramenta, não há nenhum método prático à disposição do profissional que possa auxiliá-lo nesta análise, uma vez que as teorias clássicas abordam apenas o caso de cargas distribuídas.

O presente trabalho tem como objetivo desenvolver um procedimento de cálculo simplificado que possa determinar os momentos fletores adicionais causados por carregamento linear centrado em lajes armadas em duas direções. Para tanto, foram estudados os vãos mais comuns, as combinações existentes de engaste e apoio dos bordos e variações da carga linear sobre as lajes.

### 2 – ANÁLISE DE PLACAS

De acordo com a relação entre os vãos de uma laje ela pode ser classificada como armada em uma direção ou em duas direções. Isso ocorre porque quanto maior a relação entre os vãos ( $\lambda$ ), menor será a transferência de carga na direção

do maior vão, tornando as solicitações nessa direção muito pequenas.

Das teorias clássicas simplificadas empregadas no cálculo de momentos fletores ocasionados em lajes armadas em duas direções destacam-se a e a Teoria de Grashoff e a Teoria de Marcus, ambos originados da Teoria de Grelhas.

Na Teoria de Grelhas, o cálculo aproximado dos momentos fletores é feito supondo-se que a laje é composta por uma série de faixas de 1,0 m de largura, independentes entre si formando uma grelha, submetidas a uma carga uniformemente distribuída (p). Da análise de grelhas determina-se a parcela de carga (quinhão) que atuará em cada direção (p<sub>x</sub> e p<sub>y</sub>). Por igualdade de flechas (f<sub>x</sub> = f<sub>y</sub>) e conhecendo-se as condições de contorno do painel pode-se então determinar os diagramas de momento fletor e força cortante. O processo das grelhas apresenta resultados conservadores quando comparados com a Teoria da Elasticidade, pois não considera a ação favorável da união entre as faixas e não leva em conta a ação dos momentos torçores.

O processo de Marcus resultou do confronto entre esses resultados, introduzindo então coeficientes de correção nas expressões dos momentos fletores positivos para ajuste dos valores obtidos por meio do processo de grelhas de modo a aproximá-los mais dos valores reais da Teoria da Elasticidade. Pinheiro (1988) enfatiza a importância histórica deste método aproximado, colocando-o como sendo o mais indicado da fase anterior aos computadores. Em resumo, os momentos positivos no centro do vão (M<sub>x</sub> e M<sub>y</sub>) e negativos nos apoios (X<sub>x</sub> e X<sub>y</sub>) são obtidos pelas Equações de (1) a (4) sendo m<sub>x</sub>, m<sub>y</sub>, n<sub>x</sub> e n<sub>y</sub> constantes tabeladas em função do tipo de vinculação da laje e da relação entre os vãos.

$$M_x = \frac{p \cdot l_x^2}{m_x} \quad (1)$$

$$M_y = \frac{p \cdot l_x^2}{m_y} \quad (2)$$

$$X_x = -\frac{p \cdot l_x^2}{n_x} \quad (3)$$

$$X_y = -\frac{p \cdot l_x^2}{n_y} \quad (4)$$

Da Teoria de Placas, decorrem inúmeros métodos simplificados para o dimensionamento de lajes, sendo a base para aplicações numéricas, tanto se utilizando sua solução aproximada por meio de séries de Fourier, como por meio do Método dos Elementos Finitos (DONIN, 2007).

Admitindo as hipóteses básicas para placas delgadas descritas por Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959) e impondo equilíbrio de forças e momentos para a configuração de laje apoiada nos quatro bordos (Tipo 1 conforme Tabela 7) as Equações de (5) a (9) podem ser aplicadas para o cálculo analítico dos momentos resultantes de um retângulo de aplicação de carga na laje.

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (5)$$

$$M_y = -D \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) \quad (6)$$

Em que:

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \quad (7)$$

$$\omega = \frac{1}{\pi^4 \cdot D} \times \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{mn}}{\left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \times \text{sen} \left( \frac{m \cdot \pi \cdot x}{a} \right) \times \text{sen} \left( \frac{n \cdot \pi \cdot y}{b} \right) \quad (8)$$

$$a_{mn} = \frac{16 \cdot P}{\pi^2 \cdot m \cdot n \cdot u \cdot v} \times \text{sen} \left( \frac{m \cdot \pi \cdot \xi}{a} \right) \times \text{sen} \left( \frac{n \cdot \pi \cdot \eta}{b} \right) \times \text{sen} \left( \frac{m \cdot \pi \cdot u}{2 \cdot a} \right) \times \text{sen} \left( \frac{n \cdot \pi \cdot v}{2 \cdot b} \right) \quad (9)$$

Em que:

E – módulo de elasticidade do material;

h – altura da placa;

$\nu$  – coeficiente de Poisson;

$\omega$  – flecha;

D – rigidez a flexão da placa;

a e b – lados l<sub>x</sub> e l<sub>y</sub> respectivamente;

m e n = 1; 3; 5; 7; ... ;

u e v – lados do retângulo de aplicação da carga em x e y respectivamente;

$\xi$  e  $\eta$  – distâncias dos eixos x e y, respectivamente, do centro de aplicação da carga;

x e y – coordenadas do ponto em que se deseja obter a flecha.

Por meio do equacionamento acima se pode simular um carregamento de parede utilizando uma faixa de dimensões u e v posicionada a distâncias dos eixos  $\xi$  e  $\eta$  obtendo-se os valores dos momentos fletores por método analítico.

Na atualidade, com o surgimento e evolução dos softwares de análise estrutural, avaliação usando métodos numéricos, por exemplo o Método dos Elementos Finitos (MEF), estão sendo cada vez mais utilizado em problemas de engenharia. O MEF consiste no princípio de dividir o domínio de integração do problema em um número discreto de pequenas regiões de dimensões finitas, denominadas elementos finitos, interligados por nós formando uma malha. Puel (2009) coloca que considerando cada região ou elementos isoladamente, há a possibilidade de se escolher funções mais simples para representar seu comportamento, o que possibilita a resolução de um problema mais complexo por vários outros de simples resolução.

O tamanho dos elementos influencia significativamente na convergência da solução sendo recomendada por Souza (2004) uma razão unitária entre a maior e a menor dimensão do elemento para elementos bidimensionais e tridimensionais. Quanto maior a discretização, mais precisa será a solução, contudo, o trabalho computacional será aumentado em função do grande número de elementos utilizados. Porém, a partir de certo nível, o aumento da malha de elementos já não gera melhora na resposta. Assim, Souza (2004) recomenda malhas mais refinadas em regiões sujeitas a concentrações de tensões tais como cantos e reentrâncias.

### 3 – METODOLOGIA

A metodologia utilizada para atingir o objetivo do presente trabalho consistiu das seguintes etapas:

- Análise das combinações de vinculações de engaste e apoio e definição dos diferentes tipos de lajes;
- Discretização e refinamento da malha de elementos finitos, visando encontrar uma malha de referência com resultados satisfatórios;
- Determinação dos esforços por MEF por meio do programa SAP2000 para todos os tipos de lajes definidas e para  $\lambda$  (razão entre vãos) de 0,5 a 2,0 variando-o em 0,1, com  $l_x$  fixado em 5,00 metros e carga de parede ( $q_p$ ) de 7,8 kN/m, o que resultou em 16 estruturas simuladas para cada situação de vinculação. O carregamento linear de 7,8 kN/m utilizado nas simulações para obtenção das constantes foi definido arbitrando-se uma parede de 0,20 m de espessura por 3,00 metros de altura e 13 kN/m<sup>3</sup> de peso específico.
- Definição do equacionamento proposto relacionando momento fletor com  $q_p$ , vãos e constantes tabeladas em função do tipo de vinculação e  $\lambda$ , similar ao procedimento da Teoria de Marcus.
- Determinação das constantes  $m_x$ ,  $m_y$ ,  $n_x$  e  $n_y$ ;
- Validação da compatibilidade entre os valores dos momentos obtidos com a formulação proposta e pelo MEF por meio da simulação de outras 8 estruturas para cada configuração de vinculação, sendo analisado a variação da carga de parede aplicada e dos comprimentos da laje;
- Validação dos resultados obtidos pela formulação proposta na comparação com os obtidos pela formulação analítica da Teoria de Placas para a configuração de quatro bordos apoiados por meio de 12 simulações.

### 4 – DESENVOLVIMENTO

Nesta seção são apresentadas as simulações, análises e proposto um procedimento de cálculo simplificado para determinação dos momentos fletores adicionais causados por carregamento linear centrado em lajes armadas em duas direções.

#### 4.1 Análise das vinculações e definição dos diferentes tipos de lajes

Para maior similaridade da metodologia proposta com a Teoria de Marcus, adotou-se a mesma referência de vinculação, porém, como a alteração da posição da parede em relação às vinculações altera o momento em cada direção, para o procedimento proposto foi necessário a criação dos casos 2B, 4B e 5B, conforme Tabela 7 (Item 6), totalizando as nove condições de vinculação a seguir:

- Tipo 1: laje totalmente apoiada;
- Tipo 2: laje com um lado engastado e parede em perpendicular ao engaste;
- Tipo 2B: laje com um lado engastado e parede em paralelo ao engaste;
- Tipo 3: dois lados engastados perpendiculares;
- Tipo 4: dois lados opostos engastados e parede em perpendicular ao engastes;

- Tipo 4B: dois lados opostos engastados e parede em paralelo aos engastes;
- Tipo 5: três lados engastados e parede em perpendicular a borda apoiada;
- Tipo 5B: três lados engastados e parede em paralelo a borda apoiada
- Tipo 6: os 4 lados engastados.

Por convenção,  $l_x$  adotado é sempre na direção perpendicular ao carregamento linear.

#### 4.2 Discretização e refinamento da malha de elementos finitos

Para o estudo da discretização foram simuladas no programa SAP2000 quatro lajes modeladas com malha de elemento "Shell" de 6x6, 10x10, 20x20 e 40x40. A configuração das lajes era tipo 2 de 5,0 x 5,0 metros com carga de parede de 7,8 kN/m, simulada por forças aplicadas nos nós do centro do vão. A variação dos valores de momento central ( $M_x$  e  $M_y$ ), na borda engastada ( $X_y$ ) e da flecha para as simulações encontram-se na Tabela 1.

Tabela 1 – Valores de momento fletor e flecha obtidos. SAP2000

Nº. de elementos	SAP2000			
	$M_x$ (kN.m)	$M_y$ (kN.m)	$X_y$ (kN.m)	Flecha (mm)
6 x 6	3,88	2,92	-6,23	1,50
10 x 10	3,93	2,89	-6,61	1,46
20 x 20	3,95	2,87	-6,91	1,43
40 x 40	3,95	2,86	-7,07	1,44

Da análise da Tabela 1 percebe-se que a diferença entre os valores obtidos da malha de 20x20 para a de 40x40 é pequena, ficando a máxima variação em 2,3%, admitindo-se, portanto, como satisfatória a discretização 20x20. Essa discretização gera elementos de 25 cm x 25 cm, medida está que será usada como padrão nas demais simulações.

#### 4.3 Determinação dos esforços por MEF

Definida a modulação dos elementos *shell* foram simuladas lajes com  $\lambda$  de 0,5 (laje de 5,0 m x 2,5 m) até  $\lambda$  de 2,0 (laje de 5,0 m x 10,0 m) nas nove configurações de vinculações com a carga de parede centrada de  $q_p = 7,8$  kN/m. Para as 144 simulações obteve-se os momentos fletores centrais ( $M_x$ ,  $M_y$ ) e os momentos nas bordas ( $X_x$ ,  $X_y$ ) conforme ilustração na Figura 1 e Tabela 2.

Figura 1 – Identificação dos momentos em uma laje Tipo 3 e  $\lambda$  de 2,0

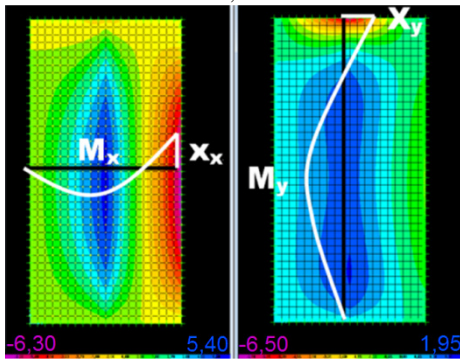


Tabela 2 – Valores dos momentos fletores (kN.m) para as lajes Tipo 3 para  $q_p = 7,8$  kN.m obtidos por MEF

$l_x$	$l_y$	$\lambda$	$M_x$	$X_x$	$M_y$	$X_y$
5,00	2,50	0,50	1,814	-0,453	1,614	-3,494
5,00	3,00	0,60	2,208	-0,945	1,884	-4,204
5,00	3,50	0,70	2,616	-1,561	2,117	-4,838
5,00	4,00	0,80	3,028	-2,240	2,280	-5,372
5,00	4,50	0,90	3,432	-2,929	2,371	-5,796
5,00	5,00	1,00	3,813	-3,588	2,399	-6,118
5,00	5,50	1,10	4,162	-4,191	2,386	-6,353
5,00	6,00	1,20	4,474	-4,731	2,338	-6,518
5,00	6,50	1,30	4,746	-5,198	2,272	-6,632
5,00	7,00	1,40	4,983	-5,596	2,203	-6,707
5,00	7,50	1,50	5,185	-5,929	2,144	-6,756
5,00	8,00	1,60	5,354	-6,206	2,096	-6,787
5,00	8,50	1,70	5,496	-6,433	2,063	-6,806
5,00	9,00	1,80	5,613	-6,619	2,038	-6,817
5,00	9,50	1,90	5,710	-6,770	2,020	-6,823
5,00	10,00	2,00	5,789	-6,892	2,006	-6,827

#### 4.4 Proposta de Modelo Analítico

Analisando as variações dos momentos obtidos ao longo das simulações feitas definiu-se uma equação linear do tipo  $A_i = (q_p \times l_i) \div C$ , onde  $l$  é o lado,  $i$  indica a direção ( $x$  ou  $y$ ),  $A$  é o momento a ser calculado,  $q_p$  é a carga por metro de parede e  $C$  é a constante a ser tabelada.

Os coeficientes  $C$  da equação foram designados seguindo os mesmos índices da Teoria de Marcus, assim, as expressões propostas são:

$$A_i = M_x \rightarrow C = m_x \rightarrow M_x = \frac{q_p \times l_x}{m_x} \quad (10)$$

$$A_i = M_y \rightarrow C = m_y \rightarrow M_y = \frac{q_p \times l_y}{m_y} \quad (11)$$

$$A_i = X_x \rightarrow C = n_x \rightarrow X_x = \frac{q_p \times l_x}{n_x} \quad (12)$$

$$A_i = X_y \rightarrow C = n_y \rightarrow X_y = \frac{q_p \times l_y}{n_y} \quad (13)$$

De posse dos valores obtidos por meio das 144 simulações, obteve-se os valores de  $m_x$ ,  $m_y$ ,  $n_x$  e  $n_y$ , isolando-os nas equações anteriores, como exemplificado na Tabela 3.

Tabela 3 – Coeficientes calculados para as lajes Tipo 3

$l_x$	$l_y$	$\lambda$	$m_x$	$n_x$	$m_y$	$n_y$
5,00	2,50	0,50	21,50	-86,09	12,08	-5,58
5,00	3,00	0,60	17,66	-41,27	12,42	-5,57
5,00	3,50	0,70	14,91	-24,98	12,90	-5,64
5,00	4,00	0,80	12,88	-17,41	13,68	-5,81
5,00	4,50	0,90	11,36	-13,32	14,80	-6,06
5,00	5,00	1,00	10,23	-10,87	16,26	-6,37
5,00	5,50	1,10	9,37	-9,31	17,98	-6,75
5,00	6,00	1,20	8,72	-8,24	20,02	-7,18
5,00	6,50	1,30	8,22	-7,50	22,32	-7,64
5,00	7,00	1,40	7,83	-6,97	24,78	-8,14
5,00	7,50	1,50	7,52	-6,58	27,29	-8,66
5,00	8,00	1,60	7,28	-6,28	29,77	-9,19
5,00	8,50	1,70	7,10	-6,06	32,14	-9,74
5,00	9,00	1,80	6,95	-5,89	34,45	-10,30
5,00	9,50	1,90	6,83	-5,76	36,68	-10,86
5,00	10,00	2,00	6,74	-5,66	38,88	-11,43

Desse modo foram obtidos os coeficientes para todas as vinculações que compõem a Tabela 7 da Seção 6.

### 5 – VALIDAÇÃO DOS RESULTADOS

Nesta seção são comparados os valores dos momentos calculados pela formulação proposta com os obtidos por novas simulações usando MEF e também é feita uma validação pela formulação analítica da Teoria de Placas para a configuração de quatro bordos apoiados.

#### 5.1 Validação da compatibilidade para variação dos valores da carga de parede aplicada e dos comprimentos da laje

Para verificar a compatibilidade entre o equacionamento proposto com as constantes determinadas e os valores obtidos pelo MEF para outras combinações de carga e de vãos, modelaram-se mais 8 casos de lajes sendo 4 casos com  $l_x$  de 4,00 metros e  $l_y$  variando de 2,00 a 8,00 metros e 4 casos com  $l_x$  de 3,00 metros e  $l_y$  variando de 1,50 a 3,00 metros. Nestas modelagens foram alterados os valores da carga de parede entre 5,00 kN/m até 16,00 kN/m. Essa análise resultou em nove planilhas comparativas conforme exemplificado na Tabela 4:

Tabela 4 – Variação entre os momentos obtidos pelo MEF e os calculados pelo equacionamento proposto para as lajes Tipo 1

$l_x$ (m)	$l_y$ (m)	$\lambda$	$q_p$ (kN/m)	$M_x$ MEF (kN.m)	$M_x$ calc. (kN.m)	Var $M_x$ (%)	$M_y$ MEF (kN.m)	$M_y$ calc. (kN.m)	Var $M_y$ (%)
4,00	8,00	2,0	7,8	6,574	6,573	-0,02	2,225	2,224	-0,04
4,00	6,00	1,5	10,0	7,063	7,063	-0,01	3,113	3,112	-0,04
4,00	4,00	1,0	6,0	2,913	2,914	0,05	1,951	1,950	-0,07
4,00	2,00	0,5	14,0	3,137	3,145	0,24	3,068	3,063	-0,17
3,00	6,00	2,0	5,0	3,162	3,160	-0,06	1,071	1,069	-0,17
3,00	4,50	1,5	16,0	8,478	8,475	-0,03	3,739	3,734	-0,13
3,00	3,00	1,0	8,0	2,911	2,914	0,12	1,956	1,950	-0,33
3,00	1,50	0,5	14,0	2,342	2,358	0,70	2,310	2,297	-0,56
						MÉD.		MÉD.	-0,19
						SD	0,24	SD.	0,17

Com os mesmos dados de carga e vãos apresentados na Tabela 4 foram obtidos a média e o desvio Padrão para todas as tipologias, mostrados na Tabela 5.

Tabela 5 – Média e Desvio Padrão das variações entre os momentos fletores obtidos por MEF e os calculados

Tipo	Var. $M_x$		Var. $X_x$		Var. $M_y$		Var. $X_y$	
	Méd. (%)	Des. Padr. (%)	Méd. (%)	Des. Padr. (%)	Méd. (%)	Des. Padr. (%)	Méd. (%)	Des. Padr. (%)
1	0,12	0,24	-	-	-0,19	0,17	-	-
2	0,29	0,60	-	-	-0,28	0,24	2,33	1,52
2B	0,07	0,24	0,46	1,04	-0,32	0,21	-	-
3	0,27	0,63	1,23	2,89	-0,36	0,24	2,67	1,47
4	-0,08	0,08	-	-	-0,72	0,88	2,52	1,74
4B	-0,03	0,11	0,05	0,34	-0,29	0,16	-	-
5	0,24	0,63	1,19	2,90	-0,37	0,29	2,97	1,50
5B	-0,08	0,06	2,80	5,84	-0,73	0,91	2,83	1,68
6	-0,11	0,09	3,17	5,85	-0,75	0,90	3,34	1,66

Da análise da Tabela 5 nota-se que a variação é pequena, sendo para  $M_x$  e  $M_y$  médias menores do que 1,00% e apresentando os maiores valores nos momentos dos apoios  $X_x$  e  $X_y$ , sendo  $3,17\% \pm 5,85\%$  e  $3,34\% \pm 1,66\%$ , respectivamente, tendo ocorrido as maiores variações nas bordas de momento fletor mais baixo (engaste localizado na condição limítrofe de laje armada em uma direção).

### 5.2 Validação da compatibilidade com a formulação analítica da Teoria de Placas para a configuração de quatro bordos apoiados

Na solução analítica de Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959) a carga de parede foi simulada como sendo uma faixa de 20 cm ( $u = 0,2\text{ m}$ ) aplicada em toda a extensão da laje ( $v = l_y$ ) com carregamento centrado ( $\xi = l_x/2$  e  $\eta = l_y/2$ ) e coeficiente de Poisson do material de 0,2, como mostrado na Tabela 6.

Tabela 6 – Comparação entre os valores obtidos pelo método analítico e pelo método proposto

$l_x$ (m)	$l_y$ (m)	$\lambda$	$q_p$ (kN/m)	$M_x$ analít. (kN.m)	$M_x$ calc. (kN.m)	Var $M_x$ (kN.m)	Var $M_x$ (%)	$M_y$ analít. (kN.m)	$M_y$ calc. (kN.m)	Var $M_y$ (kN.m)	Var $M_y$ (%)
5,00	10,00	2,0	7,80	8,02	8,22	0,19	2,34	2,63	2,78	0,15	5,47
5,00	7,50	1,5	7,80	6,70	6,89	0,19	2,76	2,99	3,03	0,04	1,39
5,00	5,00	1,0	7,80	4,55	4,74	0,18	3,89	3,12	3,17	0,05	1,42
5,00	2,50	0,5	7,80	2,02	2,19	0,17	7,92	2,09	2,13	0,05	2,18
4,00	8,00	2,0	7,80	6,38	6,57	0,19	2,94	2,09	2,22	0,13	5,84
4,00	6,00	1,5	10,00	6,82	7,06	0,24	3,47	3,06	3,11	0,05	1,73
4,00	4,00	1,0	6,00	2,77	2,91	0,14	4,90	1,92	1,95	0,03	1,75
4,00	2,00	0,5	14,00	2,83	3,14	0,31	10,01	2,98	3,06	0,08	2,67
3,00	6,00	2,0	5,00	3,03	3,16	0,13	3,96	1,00	1,07	0,07	6,46
3,00	4,50	1,5	16,00	8,08	8,48	0,40	4,67	3,65	3,73	0,09	2,32
3,00	3,00	1,0	8,00	2,72	2,91	0,19	6,61	1,90	1,95	0,05	2,32
3,00	1,50	0,5	14,00	2,04	2,36	0,32	13,50	2,22	2,30	0,08	3,54
						Média	5,58			Média	3,09
						SD	3,23			SD	1,74

Da análise a variação dos momentos obtidos analiticamente ( $M_x$  analít. e  $M_y$  analít.) com os momentos obtidos pela metodologia proposta ( $M_x$  calc. e  $M_y$  calc.) percebe-se que a variação é pequena, sendo para  $M_x$  uma variação de  $5,58\% \pm 3,23\%$  e para  $M_y$  uma variação de  $3,09\% \pm 1,74\%$ . Percebe-se também que em ambas as direções e em todas as análises os valores obtidos pela

metodologia proposta ficaram a favor da segurança, sendo superiores aos encontrados pelo método analítico.

## 6 – APLICAÇÃO DO MODELO PROPOSTO

Todo o procedimento desenvolvido para o cálculo do acréscimo de momento fletor ocasionado por carga linear centrada em laje encontra-se sintetizado na Tabela 7.

Na Tabela 7 são apresentadas as fórmulas em sua parte superior, as tipologias das lajes com suas representações e constantes na parte central e as notas importantes para sua utilização no rodapé. De posse dele o engenheiro pode calcular esforço na laje proveniente da carga de parede centrada.

Como aplicação calculou-se uma laje em concreto armado conforme Figura 2, com espessura de 10,00 cm (2,5 kN/m<sup>2</sup>), com carregamento de regularizações e revestimentos de 1,0 kN/m<sup>2</sup>, com carga de utilização de 2,0 kN/m<sup>2</sup>, nas dimensões indicadas e que recebe uma carga de parede de 5,0 kN/m (Figura 2).

Figura 2 – Configuração geométrica da laje exemplo

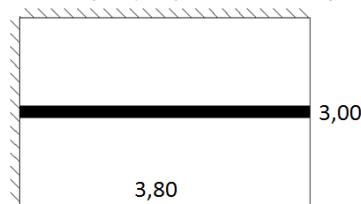


Tabela 7 – Síntese do equacionamento proposto

CÁLCULO DO ACRÉSCIMO DE MOMENTO FLETOR OCASIONADO POR CARGA LINEAR CENTRADA EM LAJE																
EQUAÇÕES	$\lambda = \frac{l_y}{l_x} \quad M_x = \frac{q_p \times l_x}{m_x} \quad M_y = \frac{q_p \times l_y}{m_y} \quad X_y = \frac{q_p \times l_y}{n_y} \quad X_x = \frac{q_p \times l_x}{n_x}$															
VINCULAÇÕES	TIPO 1			TIPO 2			TIPO 2B			TIPO 3			TIPO 4			
$\lambda$	$m_x$	$m_y$	$m_x$	$m_y$	$n_y$	$m_x$	$n_x$	$m_y$	$m_x$	$n_x$	$m_y$	$n_y$	$m_x$	$m_y$	$n_y$	
0,50	17,81	9,14	21,59	11,99	-5,55	17,71	-37,21	9,43	21,50	-86,09	12,08	-5,58	24,98	15,59	-6,75	
0,60	14,60	9,45	17,80	12,12	-5,48	14,56	-22,10	10,09	17,66	-41,27	12,42	-5,57	20,81	15,62	-6,63	
0,70	12,27	9,91	15,03	12,23	-5,45	12,39	-15,42	11,06	14,91	-24,98	12,90	-5,64	17,75	15,64	-6,53	
0,80	10,54	10,55	12,89	12,51	-5,46	10,86	-11,92	12,36	12,88	-17,41	13,68	-5,81	15,35	15,67	-6,46	
0,90	9,24	11,35	11,21	12,97	-5,53	9,77	-9,86	13,97	11,36	-13,32	14,80	-6,06	13,41	15,81	-6,43	
1,00	8,23	12,31	9,88	13,60	-5,64	8,97	-8,56	15,90	10,23	-10,87	16,26	-6,37	11,80	16,08	-6,44	
1,10	7,46	13,42	8,82	14,41	-5,80	8,38	-7,69	18,14	9,37	-9,31	17,98	-6,75	10,47	16,50	-6,50	
1,20	6,85	14,68	7,97	15,34	-6,00	7,93	-7,08	20,68	8,72	-8,24	20,02	-7,18	9,37	17,09	-6,60	
1,30	6,37	16,09	7,28	16,44	-6,23	7,59	-6,65	23,29	8,22	-7,50	22,32	-7,64	8,47	17,84	-6,74	
1,40	5,98	17,62	6,73	17,69	-6,49	7,33	-6,33	25,79	7,83	-6,97	24,78	-8,14	7,73	18,76	-6,92	
1,50	5,66	19,28	6,29	19,10	-6,77	7,13	-6,09	28,19	7,52	-6,58	27,29	-8,66	7,12	19,84	-7,14	
1,60	5,41	21,07	5,93	20,61	-7,08	6,97	-5,91	30,51	7,28	-6,28	29,77	-9,19	6,63	21,09	-7,38	
1,70	5,19	22,87	5,63	22,26	-7,40	6,85	-5,77	32,76	7,10	-6,06	32,14	-9,74	6,22	22,48	-7,66	
1,80	5,02	24,64	5,38	23,98	-7,75	6,75	-5,66	34,94	6,95	-5,89	34,45	-10,30	5,88	24,02	-7,95	
1,90	4,87	26,37	5,18	25,74	-8,10	6,67	-5,58	37,09	6,83	-5,76	36,68	-10,86	5,60	25,71	-8,27	
2,00	4,75	28,06	5,01	27,48	-8,47	6,61	-5,52	39,18	6,74	-5,66	38,88	-11,43	5,36	27,52	-8,60	
VINCULAÇÕES	TIPO 4B			TIPO 5			TIPO 5B			TIPO 6						
$\lambda$	$m_x$	$n_x$	$m_y$	$m_x$	$n_x$	$m_y$	$n_y$	$m_x$	$n_x$	$m_y$	$n_y$	$m_x$	$n_x$	$m_y$	$n_y$	
0,50	17,62	-37,94	9,73	21,42	-86,28	12,17	-5,61	24,95	-284,67	15,60	-6,76	24,92	-284,67	15,61	-6,76	
0,60	14,53	-23,08	10,76	17,53	-41,71	12,73	-5,65	20,71	-93,08	15,73	-6,65	20,61	-92,86	15,82	-6,68	
0,70	12,50	-16,62	12,28	14,80	-25,71	13,59	-5,84	17,58	-45,88	15,94	-6,61	17,43	-46,10	16,26	-6,70	
0,80	11,13	-13,30	14,30	12,87	-18,38	14,94	-6,16	15,18	-28,04	16,35	-6,65	15,02	-28,53	17,06	-6,84	
0,90	10,20	-11,39	16,82	11,50	-14,50	16,80	-6,58	13,30	-19,50	17,01	-6,76	13,20	-20,25	18,30	-7,10	
1,00	9,55	-10,21	19,83	10,52	-12,23	19,12	-7,10	11,82	-14,79	17,96	-6,95	11,84	-15,77	20,01	-7,46	
1,10	9,09	-9,45	23,05	9,82	-10,82	21,99	-7,68	10,66	-11,94	19,21	-7,21	10,84	-13,13	22,23	-7,92	
1,20	8,76	-8,93	26,12	9,31	-9,89	24,89	-8,30	9,76	-10,10	20,78	-7,53	10,09	-11,46	24,95	-8,46	
1,30	8,52	-8,58	28,97	8,94	-9,26	27,98	-8,96	9,06	-8,85	22,67	-7,91	9,54	-10,36	28,18	-9,06	
1,40	8,35	-8,34	31,73	8,67	-8,83	30,90	-9,64	8,50	-7,97	24,90	-8,34	9,12	-9,61	31,91	-9,69	
1,50	8,23	-8,17	34,35	8,47	-8,52	33,74	-10,33	8,07	-7,33	27,44	-8,80	8,81	-9,09	36,04	-10,35	
1,60	8,14	-8,06	36,86	8,31	-8,31	36,43	-11,03	7,72	-6,86	30,31	-9,30	8,58	-8,72	39,97	-11,03	
1,70	8,07	-7,98	39,25	8,21	-8,16	39,02	-11,73	7,45	-6,51	33,47	-9,81	8,41	-8,46	43,59	-11,72	
1,80	8,03	-7,94	41,61	8,12	-8,06	41,49	-12,42	7,24	-6,24	36,72	-10,34	8,28	-8,28	46,93	-12,42	
1,90	8,00	-7,91	43,95	8,07	-7,99	43,87	-13,12	7,06	-6,04	39,80	-10,89	8,18	-8,15	50,00	-13,11	
2,00	7,98	-7,89	46,26	8,03	-7,95	46,24	-13,82	6,93	-5,88	42,72	-11,45	8,11	-8,06	52,92	-13,81	

Notas:  $l_x$  = direção perpendicular ao carregamento linear;  $l$  em metros;  $q_p$  = carga linear da parede em kN/m

Aplicando a Teoria de Marcus para a obtenção dos esforços para as cargas distribuídas:

$$M_x = \frac{p \cdot l_x^2}{m_x} = \frac{5,5 \times 3,0^2}{25} = 1,98 \text{ kN.m} \quad (13)$$

$$M_y = \frac{p \cdot l_x^2}{m_y} = \frac{5,5 \times 3,0^2}{40} = 1,24 \text{ kN.m} \quad (14)$$

$$X_x = -\frac{p \cdot l_x^2}{n_x} = -\frac{5,5 \times 3,0^2}{11} = -4,50 \text{ kN.m} \quad (15)$$

$$X_y = -\frac{p \cdot l_x^2}{n_y} = -\frac{5,5 \times 3,0^2}{18} = -2,75 \text{ kN.m} \quad (16)$$

Utilizando a metodologia proposta para a carga de parede aplicada tem-se:

$$M_x = \frac{q_p \times l_x}{m_x} = \frac{5,0 \times 3,0}{8,37} = 1,79 \text{ kN.m} \quad (17)$$

$$M_y = \frac{q_p \times l_y}{m_y} = \frac{5,0 \times 3,8}{21,63} = 0,88 \text{ kN.m} \quad (18)$$

$$X_x = \frac{q_p \times l_x}{n_x} = \frac{5,0 \times 3,0}{-7,73} = -1,94 \text{ kN.m} \quad (19)$$

$$X_y = \frac{q_p \times l_y}{n_y} = \frac{5,0 \times 3,8}{-7,51} = -2,53 \text{ kN.m} \quad (20)$$

O momento total será então a superposição dos momentos obtidos pelo Método de Marcus com os obtidos pelo método proposto:

$$M_{x,total} = 1,98 + 1,79 = 3,77 \text{ kN.m} \quad (21)$$

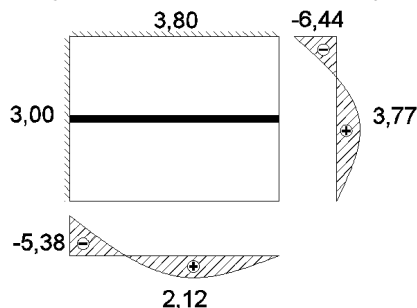
$$M_{y,total} = 1,24 + 0,88 = 2,12 \text{ kN.m} \quad (22)$$

$$X_{x,total} = -4,50 - 1,94 = -6,44 \text{ kN.m} \quad (23)$$

$$X_{y,total} = -2,75 - 2,53 = -5,38 \text{ kN.m} \quad (24)$$

Da análise dos esforços obtidos observa-se a ordem de grandeza entre os valores envolvidos. Para  $M_x$  e  $X_y$  o momento fletor proveniente da carga distribuída e da carga linear foi próximo. Isso mostra que a análise do carregamento de parede sobre laje deve ser feito com critério e que estimativas sem parâmetros podem comprometer o dimensionamento. A Figura 3 ilustra os momentos fletores obtidos com a formulação proposta.

Figura 3 – Diagrama de momentos fletores da laje de exemplo



Na Tabela 8 são apresentados os resultados obtidos utilizando o Método dos Elementos Finitos, o Processo de Marcus e o processo ora aqui proposto.

Tabela 8 – Comparação entre os Momentos obtidos por MEF, Processo de Marcus e Processo Proposto

Distribuída				
Esforço	SAP (kN.m)	Marcus (kN.m)	Var. (kN.m)	Var. (%)
$M_x$	2,20	1,98	-0,22	10,00
$M_y$	1,47	1,24	-0,23	15,65
$X_x$	-4,46	-4,50	-0,04	-0,90
$X_y$	-3,79	-2,75	1,04	27,44
Aplicada				
Esforço	SAP (kN.m)	Calc. (kN.m)	Var. (kN.m)	Var. (%)
$M_x$	1,79	1,79	0,00	0,00
$M_y$	0,89	0,88	-0,01	1,12
$X_x$	-1,94	-1,94	0,00	0,00
$X_y$	-2,45	-2,53	-0,08	-3,27
TOTAL				
Esforço	SAP (kN.m)	Marcus + calc. (kN.m)	Var. (kN.m)	Var. (%)
$M_x$	3,99	3,77	-0,22	5,51
$M_y$	2,36	2,12	-0,24	10,17
$X_x$	-6,40	-6,44	-0,04	-0,63
$X_y$	-6,24	-5,38	0,86	13,78

Da análise das variações ocorridas para a carga distribuída tem-se uma diferença de até 1,04 kN.m entre o momento obtido pelo MEF e o Método de Marcus, variação de 27,44% contrária a segurança. Já para a carga aplicada, a maior variação foi de -0,08 kN.m, diferença de 3,27% a favor da segurança.

Da análise dos momentos finais, resultados dos dois carregamentos, percebe-se que a variação significativa é resultado do procedimento para o carregamento distribuído e que o método proposto por este trabalho além de apresentar baixa variação, colabora para a redução da variação no momento fletor total.

## CONCLUSÃO

Conforme pode-se observar, o modelo proposto apresenta resultados consistentes quando comparados às simulações por MEF e pela Teoria das Placas, uma vez que as validações apresentaram uma diferença de valores muito pequena. A variação dos valores obtidos entre o equacionamento proposto e os encontrados com o uso do MEF ficou com a maior diferença em  $X_x$  de 3,17% ± 5,85%, sendo as maiores variações a favor da segurança. A variação dos momentos obtidos analiticamente com os momentos obtidos pela metodologia proposta ficou com maior diferença em  $M_x$  de 5,58% ± 3,23%, sendo todos os valores a favor da segurança.

Conforme foi demonstrado no exemplo de aplicação proposto, o método é simples e prático. O roteiro é similar ao Método de Marcus, consistindo em enquadrar o tipo de laje, calcular a relação entre os lados ( $\lambda$ ), obter os coeficientes de tabelas e calcular o momento fletor adicional ocasionado pela carga aplicada.

Finalmente, pode-se concluir que o equacionamento proposto pode ser de grande validade na determinação dos

momentos fletores adicionais causados por um carregamento linear centrado em lajes armadas em duas direções ou para a verificação dos resultados automáticos gerados por ferramentas baseadas no Método dos Elementos Finitos.

#### REFERÊNCIAS

- DONIN, C. **Análise numérica de lajes nervuradas por meio do método dos elementos finitos**. 2002, 138 f. Dissertação (Mestrado em Construção Civil). Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2007.
- MAGALHÃES, F. L. **Estudo dos momentos fletores negativos nos apoios de lajes formadas por elementos pré-moldados tipo nervuras com armação treliçada**. 2001, 174 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas). Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos, 2001.
- PINHEIRO, P. M. **Análise elástica e plástica de lajes retangulares de edifícios**. 1988, 303 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas). Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos, 1988.
- PUEL, A. **Modelagem de lajes planas simétricas e assimétricas em concreto armado: Análise integrada lajexpilar**. 2009, 163 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2009.
- SOUZA, R. A. **Concreto Estrutural: Análise e dimensionamento de elementos com descontinuidade**. 2004, 379 f. Tese (Doutorado em Engenharia). Universidade de São Paulo, São Paulo, 2004.
- TIMOSHENKO, S. P.; WOINOWSKY-KRIEGER, S. **Theory of Plates and Shells**. McGraw-Hill Kogakusha, 1959.