



# **“Relatório de Estágios de Pós-Doutorado de Curta Duração Realizados na École Polytechnique Fédérale de Lausanne (Suíça) e na Technology University of Delft (Holanda)”**

Pesquisador: Prof. Dr. Rafael Alves de Souza  
Instituição de Vinculação: Universidade Estadual de Maringá

Lausanne e Delft, Julho de 2011

## Agradecimentos

Gostaria de agradecer todos os amigos conquistados durante esse período extremamente curto, mas incrivelmente produtivo nas Universidades de Lausanne (Suíça) e Delf (Holanda). Em especial, meus sinceros agradecimentos aos seguintes colegas: Prof. Dr. Aurelio Muttoni, Prof. Dr. Miguel Fernandez Ruiz, Prof. Dr. Daniel Alexander Kuchma, Prof. Dr. Olivier Burdet, Prof. Dr. Pierre Hoogemboom, Prof. Dr. Angelo Simoni, Eng. Stefano Campana, Eng. Rojas Horna Franco Rodolfo, Eng<sup>a</sup> Galina Argirova, Eng. Thibault Clément, Eng. Jürgen Einpaul, Eng. Stefan Lips, Eng. Francisco Natário e Eng. Michael Rupf.

Meus agradecimentos especiais à Srta Yvonne Buhel, secretária da EPFL, que tão bem cuidou dos preparativos para a nossa chegada em Lausanne, em especial pela nossa casa confortável em Ecublens negociada a tempo em alta temporada junto à Naef Immobilier. Ao Hotel West Cord em Delft, que durante vários dias no serviu de casa, com um atendimento fora do comum.

Meus sinceros agradecimentos à Universidade Estadual de Maringá, pela liberação durante o período e por me fornecer todo suporte ao longo dos anos que venho atuando como professor e pesquisador. Meus agradecimentos aos meus alunos, orientandos de iniciação científica e mestrado, bem como colegas de trabalho pela paciência e suporte durante meu período de afastamento.

Meus agradecimentos à Fundação Araucária e Cnpq pelo suporte em pesquisa nos últimos três anos. Sem vosso apoio financeiro seria praticamente impossível estabelecer uma estrutura mínima objetivando acompanhar os desenvolvimentos de pesquisadores de ponta na modelagem das estruturas de concreto estrutural sujeitas a descontinuidades.

Meu inestimável reconhecimento à minha família (Nilson, Ângela, Sinho, Vi, Roberto, Luiz, Ana) por todo suporte, amor e companheirismo. Meu eterno agradecimento à minha amada esposa Daniela, meu bambino querido Gabriel (4 meses e já feliz na estrada!) e minha "mother in law" Sueli Corazza. Juntos percorremos inúmeros quilômetros entre Lausanne e Delft, cortamos países completamente diferentes e experimentamos o sabor de várias línguas, só para que eu pudesse aprender um pouco mais sobre "stress fields" e "stringer-panel". Acima de tudo, ao meu bom amigo lá de cima, sempre me protegendo e proporcionando momentos inesquecíveis para a minha memória.

***"Conhecimento real é saber a extensão da própria ignorância."  
(Confúcio)***

# 1. Introdução

O presente relatório tem por objetivo apresentar as principais atividades de pós-doutorado de curta duração desenvolvidas na École Polytechnique Fédérale de Lausanne (Suíça) e na Technology University of Delft (Holanda), durante o mês de Julho de 2011. As presentes investigações foram previstas em projetos de pesquisa financiados junto à Fundação Araucária e Cnpq, ambos com o título “Análise Não-Linear de Elementos de Membrana em Concreto Estrutural”.

Na École Polytechnique Fédérale de Lausanne as pesquisas desenvolvidas foram orientadas pelo Prof. Dr. Aurélio Muttoni, com forte interação junto aos doutores Miguel Fernandez Ruiz, Olivier Burdet, e com o Prof. Dr. Daniel A. Kuchma (University of Illinois at Urbana-Champaign), que encontrava-se em período sabático na referida instituição. Basicamente, as atividades concentraram-se na aplicação do Método dos Campos de Tensões ("Stress Fields"), com o estudo focado em aplicações manuais e computacionais (aprendizado do programa JCONC), conforme ilustra o documento apresentado no Anexo A.

Procurou-se em especial investigar a aplicação do Método dos Campos de Tensão para o dimensionamento de elementos de membrana, de maneira que informações mais aprofundadas sobre tal procedimento serão apresentadas em maior profundidade no presente relatório. Adicionalmente, teve-se a oportunidade de apresentar a palestra denominada “*Collapses of Structures: Learning from Errors*”, cujos slides encontram-se no Anexo B.

Na Technology University of Delft, as atividades foram desenvolvidas sob a orientação do Prof. Dr. Pierre C. J. Hoogenboom, sendo que as atividades se concentraram na aplicação manual e computacional do Método Corda-Painel ("Stringer-and-Panel Method"), conforme atesta o documento presente no Anexo C. Em especial, as atividades ficaram focadas no domínio de um método manual para o cálculo das forças internas atuantes nas cordas e nos painéis, de maneira que o método possa ter competitividades com outras alternativas como o "Método dos Campos de Tensão" e "Modelos de Escoras e Tirantes". Adicionalmente, procurou-se entender toda a programação contida no programa SpanCad, de maneira que no futuro possa ser desenvolvida ferramenta semelhante.

Finalmente, a presente missão científica, apesar de extremamente rápida, possibilitou a interação com pesquisadores de renome internacional, cujo trabalho encontra-se consolidado através de inúmeros artigos e livros. O contato direto com os referidos pesquisadores possibilitou a obtenção de informações difíceis de serem obtidas ou produzidas nos meios mencionados, uma vez que se tratam de técnicas muito específicas para o dimensionamento de estruturas especiais em concreto armado. Acredita-se que as atividades iniciadas nesse curto espaço de tempo darão luz a uma parceria científica muito produtiva nos próximos anos, sendo que proposta de pesquisa será imediatamente encaminhada ao Cnpq no que se refere à renovação da Bolsa Produtividade em Pesquisa.

As informações ora aqui contidas refletem o período extremamente breve experimentado junto a pesquisadores de Lausanne e Delft. Para informações mais aprofundadas, favor consultar as referências que serão aqui indicadas bem como artigos do presente pesquisador a serem publicados no futuro.

## 2. Método dos Campos de Tensão ("Stress Fields Method")

### 2.1 Introdução

Desde os primeiros cálculos de dimensionamento do concreto estrutural tem-se reconhecido a deficiência do concreto em absorver tensões de tração. Dessa maneira, desde o princípio tem-se admitido que o concreto resista exclusivamente à compressão e que armaduras metálicas possam resistir tanto à tração quanto à compressão.

O modelo referido anteriormente ficou conhecido na literatura como "Modelo de Treliça Clássica" e foi introduzido por RITTER (1899), sendo posteriormente refinado por MÖRSCH (1908). Dessa maneira, também pode-se encontrar referências ao "Modelo de Treliça Clássica" como sendo o "Modelo de Treliça de Ritter & Morsch", de maneira a homenagear os dois pesquisadores alemães.

O "Modelo de Treliça Clássica" foi amplamente estudado durante as décadas de 60 e 70 na Universidade de Stuttgart e ganhou grande destaque no Brasil a partir dos trabalhos publicados por LEONHARDT & MÖNNIG (1977 e 1978). Finalmente, nas décadas de 80 e 90, a generalização do "Modelo de Treliça Clássica" para a análise de peças sujeitas à descontinuidades ficou conhecida como "Modelo de Escoras e Tirantes" ou "Método das Bielias", também ocorrendo na Universidade de Stuttgart através dos trabalhos clássicos de SCHLAICH et al. (1987) e SCHÄFER & SCHLAICH (1991).

Deve-se observar que o "Método das Bielias" desenvolveu-se a partir de equações de equilíbrio, baseando-se em esforços internos estimados nas escoras e nos tirantes antes da ocorrência da fissuração do concreto, isto é, a partir de análises elásticas. Tal alternativa de dimensionamento de estruturas de concreto sujeitas a descontinuidades ("Regiões D") usufruiu atualmente de grande destaque em códigos internacionais como o CEB-FIP Model Code 1990 (1993), CSA (1994), EHE (1999) e ACI-318 (2005).

Em paralelo ao desenvolvimento do "Método das Bielias" e baseando-se em pesquisas independentes baseadas na Teoria da Plasticidade, pesquisadores das universidades de Zürich e Copenhague desenvolveram um método alternativo para a análise de estruturas de concreto estrutural sujeito a descontinuidades, denominado "Método dos Campos de Tensão". Entre os trabalhos pioneiros nessa área, destacam-se aqueles publicados por DRUCKER (1961), THÜRLIMANN et al (1975 e 1983), NIELSEN et al (1978) e MARTI (1980).

Atualmente, merecem destaque as publicações de MUTTONI et al (1997), RUIZ & MUTTONI (2007), KOSTIC (2009) e MUTTONI et al (2011). Adicionalmente, deve-se observar que o método foi adotado pela norma suíça SIA 262 (2003), tendo-se em vista a grande potencialidade do modelo para o dimensionamento de regiões especiais.

Na realidade, pode-se afirmar que os modelos de escoras e tirantes resultantes do "Método das Bielias" nada mais são do que representações discretas (resultantes) dos fluxos de tensão obtidos com o auxílio do "Método dos Campos de Tensão". Enquanto o "Método das Bielias" considera condições de equilíbrio

baseadas em análises elásticas, o "Método do Campo de Tensões" assume o equilíbrio a partir de análises considerando os materiais com comportamento elasto-plástico.

Observa-se que na realidade, que o "Método das Bielas" e o "Método dos Campos de Tensão" são métodos complementares e ambos possibilitam ao engenheiro de estruturas excelentes abordagens no que se refere o dimensionamento de estruturas especiais em concreto estrutural. No entanto, conforme demonstrado por MUTTONI et al (2008) e SOUZA (2008), a imposição de armaduras mínimas em malha em estruturas do tipo parede pode ocasionar grande distorção dos modelos de escoras e tirantes concebidos a partir de análises puramente elástica, fato esse que só pode ser superado através de análise plásticas ou não-lineares.

Dessa maneira, o "Método dos Campos de Tensão" fornece uma abordagem mais genérica e ajustada aos requisitos práticos necessários na armação das estruturas em concreto armado e protendido, uma vez que pode levar em conta o fluxo das tensões considerando-se a presença das malhas de armaduras mínimas normalmente exigidas pelos códigos normativos, bem como o comportamento não-linear dos materiais.

## 2.2 Fundamentos Básicos do "Método dos Campos de Tensão"

De acordo com PRAGER & HODGE (1951), o Limite Estático (Limite Inferior) da Teoria da Plasticidade pode ser definido da seguinte maneira:

*"Um estado de cargas  $[Q_i]$  que pertence a um campo de tensões que satisfaça às condições de equilíbrio e às condições de contorno estáticas, e que ao mesmo tempo não viola a condição de plasticidade pode ser considerado um limite inferior da carga de ruptura  $[Q_r]$ , ou seja,  $[Q_i] \leq [Q_r]$ "*

Por outro lado, ainda de acordo com PRAGER & HODGE (1951), o Limite Cinemático (Limite Cinemático) da Teoria da Plasticidade pode ser definido da seguinte maneira:

*"Um estado de cargas  $[Q_s]$  correspondente a um mecanismo lícito que satisfaça as condições de contorno geométricas e a condição de plasticidade em zonas plásticas corresponde a um limite superior da carga de ruptura  $[Q_r]$ , ou seja,  $[Q_s] \geq [Q_r]$ "*

Observa-se que o Limite Inferior da Teoria da Plasticidade é muito útil nos casos de dimensionamento, enquanto o Teorema Superior pode ser extremamente valioso nos casos de verificação. Por exemplo, o Limite Inferior pode ser reescrito da seguinte maneira, no caso de dimensionamento de peças em concreto estrutural:

*"Um dimensionamento plástico pode ser efetuado ao se escolher um campo de tensões em equilíbrio com as cargas de dimensionamento, de maneira que as dimensões adotadas para o concreto e quantidade de armaduras dimensionadas levem a uma resistência superior aos esforços internos".*

A Figura 1 ilustra o dimensionamento de uma viga contínua utilizando tal metodologia e extraída das notas de aula de RUIZ (2009). Conforme pode-se observar, a viga contínua está sujeita a um sistema de cargas que por sua vez encontra-se em equilíbrio com um campo de tensões escolhido. Em seguida, procura-se dimensionar o elemento estrutural de maneira que a resistência (linhas em vermelho) seja superior aos esforços instalados.

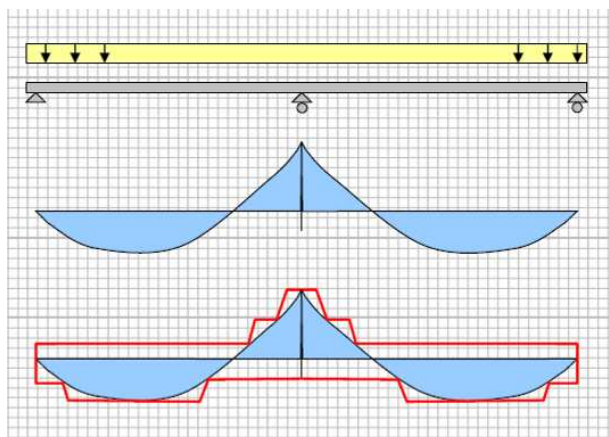


Figura 1 - Exemplo de dimensionamento utilizando-se o Limite Inferior da Teoria da Plasticidade (Fonte: RUIZ (2009))

Por outro lado, a verificação de elementos estruturais em concreto estrutural pode ser feita tanto através do Limite Inferior ou através dos Limites Combinados (combinação entre o Limite Inferior e o Limite Superior caso se busque a carga de ruptura exata). Dessa maneira, uma solução exata  $[Q_r]$  pode ser obtida através de uma solução combinada entre os limites apresentados anteriormente. Ou seja, a carga exata de ruptura  $[Q_r]$  deve estar em equilíbrio com um campo de tensões que satisfaça a condição plástica e forme um mecanismo lícito, conforme ilustra a Tabela 1.

Tabela 1 - Limite Superior e Inferior da Teoria da Plasticidade

	Limite Inferior	Solução Exata	Limite Superior
Equilíbrio	Sim	Sim	Sim
Condição de Plasticidade	Sim	Sim	?
Mecanismo Lícito	?	Sim	Sim
Resultado	$[Q_i] \geq [Q_r]$	$[Q_r]$	$[Q_s] \leq [Q_r]$

Dessa maneira, uma verificação plástica pode ser efetuada através da escolha de um mecanismo lícito. Assim, o sistemas de cargas exteriores que satisfaz a condição cinemática da plasticidade pode ser determinado. O mecanismo escolhido será a solução exata segundo a Teoria da Plasticidade caso exista um campo de tensões em equilíbrio com o sistema de cargas ao mesmo tempo que se respeita a condição de plasticidade imposta. Caso isso não seja possível, um novo mecanismo deve ser escolhido, até que seja possível determinar a carga de ruptura exata segundo a Teoria da Plasticidade.

A Figura 2, também extraída das notas de aula de RUIZ (2009) ilustra a busca pela solução exata da carga de ruptura de uma viga contínua. Conforme pode-se observar, procura-se obter a combinação entre um mecanismo lícito e a ocorrência de plasticidade em zonas plásticas. Caso as duas situações ocorram em

simultâneo, e se verifique ainda o equilíbrio do campo de tensões para as cargas externas, pode-se obter a carga exata de ruptura segundo a Teoria da Plasticidade.

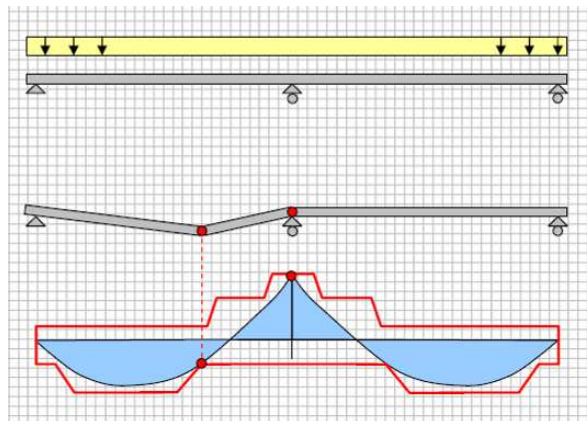


Figura 2 - Obtenção da carga exata de ruptura segundo os Limites Combinados da Teoria da Plasticidade (Fonte: RUIZ (2009))

Classicamente, o "Método dos Campos de Tensão" tem sido tradicionalmente baseado no Limite Inferior da Teoria da Plasticidade, com a adoção de uma lei constitutiva rígido-plástica para o concreto, em contraste com o comportamento perfeitamente elástico usualmente assumido no "Método das Bielas", conforme ilustra a Figura 3. A Figura 4, por sua vez, procura ilustrar o comportamento usualmente assumido para as armaduras.

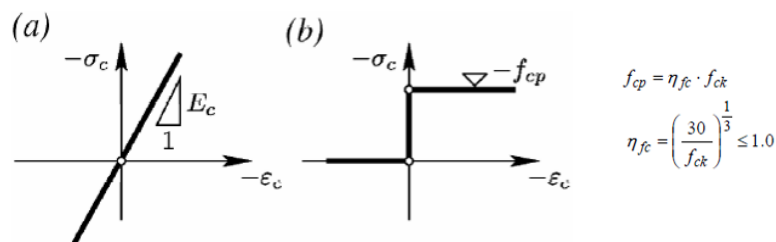


Figura 3 - Comparação entre o comportamento elástico do concreto assumido para o "Método das Bielas" e o comportamento rígido-plástico classicamente assumido no "Método dos Campos de Tensão" (Fonte: RUIZ & MUTTONI (2007))

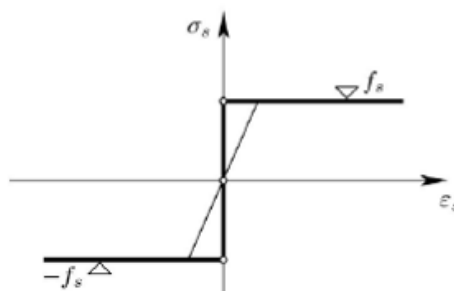


Figura 4 - Comportamento usualmente assumido para as armaduras no "Método dos Campos de Tensão" (Fonte: RUIZ (2009))



Para a construção de campos de tensão recorre-se a três elementos básicos, muito semelhantes àqueles usualmente empregados no "Método das Bielas": as escoras, os tirantes e os nós. No entanto, observa-se que os limites de tensão recomendados para o "Método dos Campos de Tensão" diferem um pouco daqueles usualmente sugeridos para o "Método das Bielas". Basicamente, procura-se levar em conta o efeito de tensões transversais de tração na máxima resistência à compressão do concreto, conforme ilustram os casos apresentados na Figura 5.

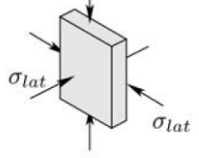
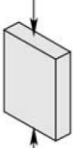
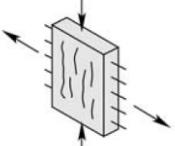
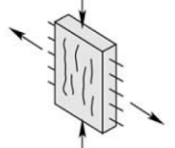
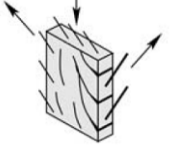
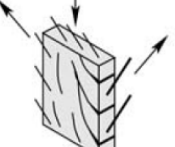
Tipo de Solicitação		Tensão efetiva ( $f_{ce}$ )	Aplicações
Concreto confinado ativamente ou passivamente e sem fissuração		$f_{cp} + 4 \cdot  \sigma_{lateral} $	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Compressão triaxial</li> <li>• Confinamento lateral</li> <li>• Introdução de cargas concentradas</li> </ul>
Concreto sem fissuração sujeito à compressão uniaxial		$f_{cp}$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Compressão simples com armadura de controle de fissuração</li> <li>• Pilares, muros e vigas em flexão</li> </ul>
Concreto fissurado com deformação lateral imposta		$0,8 \cdot f_{cp}$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Muros</li> <li>• Lajes</li> <li>• Vigas com deformação lateral</li> </ul>
Concreto fissurado com deformação diagonal imposta		$0,6 \cdot f_{cp}$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Muros</li> <li>• Lajes com torção</li> <li>• Vigas com cortante ou torção</li> </ul>
Concreto fissurado com armadura plastificada nas duas direções		$0,4 \cdot f_{cp}$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Vigas ou muros com armadura longitudinal e transversal plastificadas</li> </ul>
Concreto sem controle de abertura de fissuras		Teoria da Plasticidade não é aplicável	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Elementos com armadura mínima insuficiente</li> <li>• Punção</li> </ul>

Figura 5 - Resistência das escoras para o "Método dos Campos de Tensão"

(Adaptado MUTTONI & RUIZ (2006))

As equações a seguir ilustram o máximo nível de tensão permitido nas escoras, a partir da Figura 5:

$$|\sigma_{c,max,d}| \leq f_{ce,d} \quad \text{Equação (1)}$$

$$f_{ce,d} = \frac{f_{ce}}{\gamma_c} \quad \text{Equação (2)}$$

Os tirantes são os elementos encarregados de transmitir tração, sendo materializados na estrutura real mediante o uso de barras passivas ou ativas (protensão). A ancoragem dos tirantes pode ser realizada via aderência caso se tenha um bom comprimento de ancoragem ou mediante o emprego de placas de ancoragem, como aquelas ilustradas na Figura 6.



Figura 6 - Emprego de placas metálicas para a ancoragem de tirantes em viga de transição  
(Fonte: FILHO (2008))

Para os tirantes, além da capacidade de ancoragem, deve-se ainda verificar se:

$$\sigma_{s,d} \leq f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} \quad \text{Equação (3)}$$

Os nós são os pontos onde ocorrem a confluência das diferentes escoras e tirantes. Conforme pode-se observar pela Figura 7, os nós desenvolvidos com o "Método dos Campos de Tensão" se aproximam muito daqueles propostos com o "Método das Bielas".

Apesar do "Método das Bielas" e do "Método dos Campos de Tensão" apresentarem fortes analogias, deve-se observar que há também algumas diferenças importantes. Uma vez que um campo de tensões lícito é proposto, pode-se obter diretamente um modelo de escoras e tirantes, a partir da disposição de diferentes escoras e tirantes como resultantes de campo de tensão. Dessa maneira, o emprego do "Método dos Campos de Tensão" se constitui em uma boa guia para a definição de modelos de escoras e tirantes. A situação contrária, isto é, o estabelecimento de campos de tensões a partir de modelos de escoras e tirantes, ainda que possível, leva a uma situação bem mais difícil de se realizar, não podendo-se garantir uma unicidade na solução.

TIPO	CONCENTRADO	DISTRIBUIDO
CCC		
CCT		
CTT		
TTT		

Figura 7 - Resistência dos nós para o "Método dos Campos de Tensão" (MUTTONI & RUIZ (2006))

### 2.3 Breve Metodologia para Obtenção de Campos de Tensão

Os elementos estruturais em concreto estrutural são normalmente constituídos de sistemas estaticamente indeterminados quando observados internamente. Dessa maneira, no caso de dimensionamento de estruturas em concreto estrutural, é necessário reconhecer as diferentes formas de transmissão dos carregamentos, bem como identificar as diferentes resistências dos subsistemas resultantes. Deve-se observar que os subsistemas a serem definidos não necessitam ainda apresentar a mesma resistência.

Ainda que seja possível estabelecer infinitos subsistemas (infinitas formas de distribuição interna), deve-se observar que apenas alguns subsistemas garantem um correto comportamento do elemento estrutural tanto no estado limite de serviço quanto no estado limite último. Adicionalmente, quanto maior for a deformação unitária de um elemento (subsistema), tanto maior será a quantidade de armadura necessária.

A Figura 8 apresenta o desenvolvimento de campos de tensão satisfatórios para uma estrutura complexa a partir de considerações cinemáticas. Em primeiro lugar se escolhe livremente uma forma possível de transmissão das cargas aplicadas (Figura 8(a)), bem como a forma provável de deformação do elemento estrutural para tal subsistema. Para que no cálculo os elementos possam ser considerados como corpos rígidos, supõe-se que nas zonas armadas as deformações estarão concentradas em fissuras distribuídas de pequena abertura. De maneira a evitar deformações concentradas (fissuras de grande abertura) são introduzidos subsistemas adicionais nessas zonas. Esse procedimento vai se repetindo sucessivamente até que se obtenha um campo de deformações satisfatório com o seu respectivo campo de tensões.

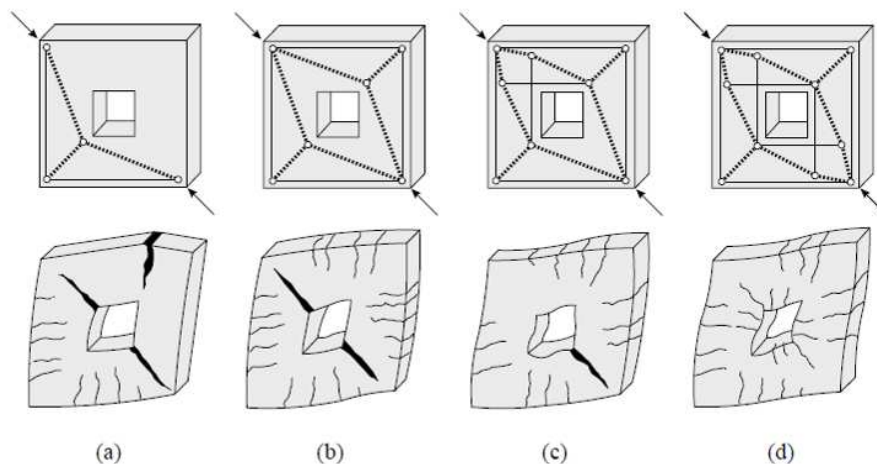


Figura 8 - Exemplo de desenvolvimento de campos de tensão para elemento complexo  
(Fonte: KOSTIC (2009))

## 2.4 Breve Descrição do Programa JCONC

De maneira a simular o comportamento de estruturas em concreto armado e protendido através do "Método dos Campos de Tensão", foi desenvolvido na École Polytechnique Fédérale de Lausanne o programa jCONC. Na realidade, o programa é resultado da fusão de outros dois programas, o iMESH (pré-processador) e o iCONC (processador e pós-processador). A seguir são apresentadas algumas características, sendo que no trabalho de RUIZ & MUTTONI (2007) pode-se obter informações mais aprofundadas.

Os programas foram totalmente desenvolvidos em código Java, possibilitando assim simulações via Internet (<http://i-concrete.epfl.ch>) e acúmulo dos resultados em rede. Adicionalmente, o código-fonte do programa é aberto e pode ser modificado objetivando atender as necessidades do usuário. De maneira muito breve, as seguintes características básicas são observadas nos programas:

- Possibilidade de modelagem bidimensional elástica e não-linear;
- Adoção de comportamento elasto-plástico para os materiais;
- Resistência à tração do concreto desprezada;
- Consideração das deformações transversais de tração em regiões de concreto comprimidas;
- Negligência do efeito de engrenamento dos grãos;
- Adoção de hipótese de ancoragem perfeita;
- Geração automática da malha de elementos finitos com elementos triangulares.

Apesar do modelo rígido-plástico ser vastamente assumido na Teoria da Plasticidade para o concreto, RUIZ & MUTTONI (2007) propõem a adoção de um comportamento elasto-plástico perfeito do concreto, que tem produzido excelentes resultados.

Conforme pode-se observar pela Figura 9, a partir do campos dos deslocamentos pode-se obter o respectivo campo das deformações (Figura 9(a) até Figura 9(b)) e as deformações principais (Figura 9(c)). Assumindo-se que as tensões principais (Figura 9(f)) possuem a mesma direção das deformações principais (Figura 9(c)) pode-se calcular as tensões principais a partir das deformações principais. A curva tensão-deformação do concreto é considerada elasto-plástica perfeita em compressão, enquanto a resistência à tração é totalmente desprezada (Figura 9(e)). Adicionalmente, de maneira a levar em consideração o efeito das deformações transversais na resistência à compressão do concreto, a resistência plástica equivalente é corrigida por um parâmetro  $\eta$  ( $\epsilon_j$ ):

$$f_{cp} = 3,1 \cdot f_c^{2/3} \cdot \eta(\epsilon_j) \quad \text{Equação (4)}$$

$$\eta(\epsilon_j) = \frac{1}{0,9 + 30 \cdot f_c^{1/3} \cdot \epsilon_j} \leq 1,0 \quad \text{Equação (5)}$$

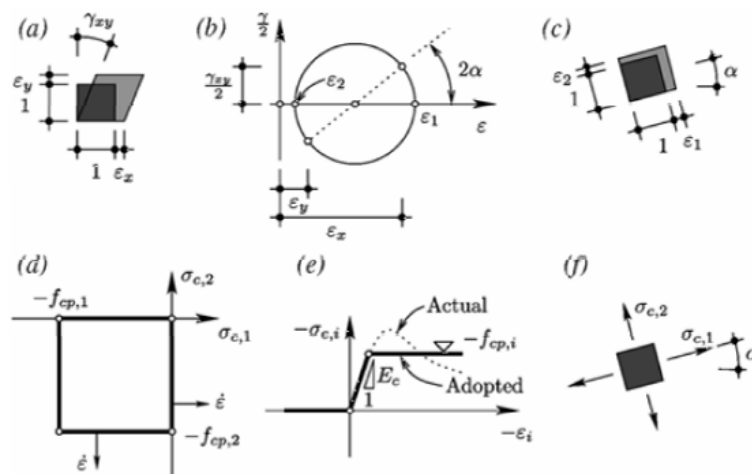


Figura 9 - Modelagem do concreto utilizando no programa jCONC: (a) deformações, (b) Círculo de Mohr e deformações principais, (c) direções principais, (d) superfície de ruptura para estado plano de tensão, (e) comportamento constitutivo real e adotado (elasto-plástico perfeito) para o concreto e (f) direções assumidas para as tensões principais. (Fonte: RUIZ & MUTTONI (2007))

Observa-se que o ato de desprezar a resistência do concreto à tração implica na necessidade de se disponibilizar uma quantidade mínima de armadura de fissuração, de maneira a se obter um comportamento adequado para a estrutura. Essa quantidade mínima de armadura garante que não ocorrerá ruptura frágil quando da fissuração, bem como garante que as fissuras serão bem distribuídas pelo elemento ao se atingir o estado limite de serviço.

Conforme pode-se observar pela Figura 10, as armaduras são modeladas através de uma curva bilinear elasto-plástica com enrijecimento, sendo que no modelo de elementos finitos utiliza-se um elemento do tipo "link" para modelar as armaduras.

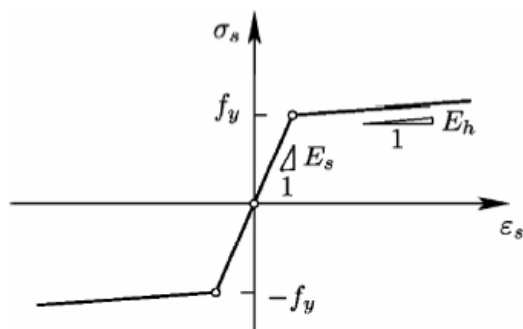


Figura 10 - Modelagem do concreto das armaduras no "Método dos Campos de Tensão"  
(Fonte: RUIZ & MUTTONI (2007))

A Figura 11 procura apresentar os campos de tensão obtidos para uma estrutura sujeita a um determinado posicionamento de armação utilizando o programa jCONC. Conforme pode-se observar os campos de compressão encontram-se representados em azul, enquanto os campos de tração encontram-se ilustrados em vermelho.

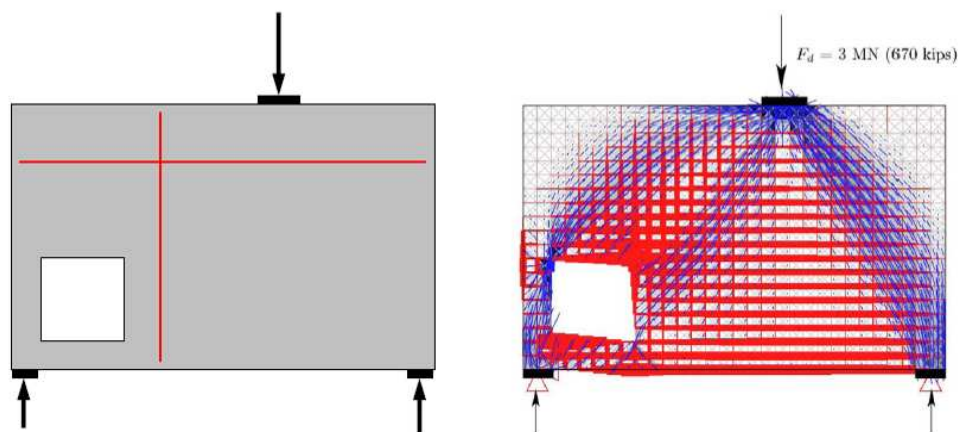


Figura 11 - Exemplo de campos de tensão obtidos com o programa jCONC

Observou-se que o programa é de fácil aprendizado, conduzindo intuitivamente ao melhor posicionamento das armaduras para as estruturas em estudo. Com as propriedades dos materiais e as condições de contorno definidas pode-se partir para uma primeira análise, preferencialmente linear, de maneira a avaliar a validade do modelo. Deve-se observar que do ponto de vista de definição dos materiais apenas duas variáveis são necessárias (resistência à compressão do concreto e resistência à tração do aço), o que diminui consideravelmente o número de variáveis normalmente envolvidas em análises não-lineares.

A partir do fluxo de tensões elásticas, pode-se facilmente adicionar armaduras nas posições necessárias ou desejadas. Em seguida, uma nova análise é conduzida, dessa vez levando em consideração a não-linearidade dos materiais. Caso as armaduras tenham sido colocadas em posições adequadas e suficientes, a convergência poderá ser obtida através da satisfação das condições de equilíbrio. Caso não se obtenha a convergência ou o erro seja muito grande, novas armaduras devem ser adicionadas, até que se obtenha uma configuração possível de equilíbrio para os campos de tensão.

O programa oferece excelente performance e pode ser utilizado em conjunto com outras ferramentas, como por exemplo, os programas CAST e ATENA, caso uma análise mais rigorosa seja necessária. Deve-se ainda observar que o programa supera uma grande dificuldade encontrada quando utilizando o modelo de escoras e tirantes. É evidente que o posicionamento das armaduras, preferencialmente colocada na prática na posição vertical ou horizontal, bem como a imposição de armaduras mínimas nos códigos normativos, influencia o campo de tensões no interior da estrutura, podendo o mesmo se afastar do campo de tensões idealizado a partir de uma análise elástica. Esse problema foi discutido anteriormente por SOUZA (2008) e MUTTONI et al (2008).

Apesar de funcionar de maneira bastante eficiente, observa-se que o programa ainda necessita de alguns ajustes na interface, bem como algumas melhorias nos arquivos de entrada de dados, principalmente no que se refere às propriedades dos materiais e números de interações. Após a realização do presente estágio, pode-se contribuir bastante em sugestões de melhoria do programa jCONC, objetivando deixar a ferramenta ainda mais interativa com os usuários.

## 2.5 Aplicação do Método aos Elementos de Membrana

O elemento ilustrado na Figura 12 está sujeito às forças  $n_x$ ,  $n_y$  e  $n_{xy}$ . O dimensionamento requer a determinação da quantidade de armadura para as direções escolhidas, bem como a determinação da espessura do elemento de maneira que a resistência do concreto não seja excedida.

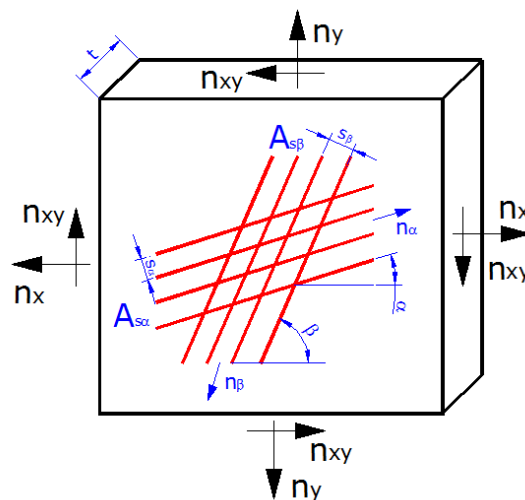


Figura 12 - Elemento de membrana em concreto armado sujeito a estado plano de tensões

De acordo com MUTTONI et al (1997), as quantidades totais de armação nas direções  $\alpha$  e  $\beta$  são dadas por  $A_{s\alpha}$  e  $A_{s\beta}$ , respectivamente. De maneira a se obter as quantidades de armadura por unidade de largura ( $\text{cm}^2/\text{m}$ ), basta dividir as armaduras totais pelos espaçamentos das barras nas direções  $\alpha$  e  $\beta$ , ou seja:

$$a_{s\alpha} = A_{s\alpha} / s_{\alpha} \quad \text{Equação (6)}$$

$$a_{s\beta} = A_{s\beta} / s_{\beta} \quad \text{Equação (7)}$$

As resultantes nas armaduras ( $n_\alpha = \sigma_{s\alpha} \cdot a_{s\alpha}$  e  $n_\beta = \sigma_{s\beta} \cdot a_{s\beta}$ ), bem como a força resultante no concreto ( $n_v = \sigma_v \cdot t$ ) são calculadas separadamente para cada caso de carregamento. A Figura 13 apresenta as forças internas devido à atuação isolada da força externa  $n_x$ . Conforme pode-se observar, utiliza-se um campo de tensões com elementos tracionados em vermelho e comprimidos em azul.

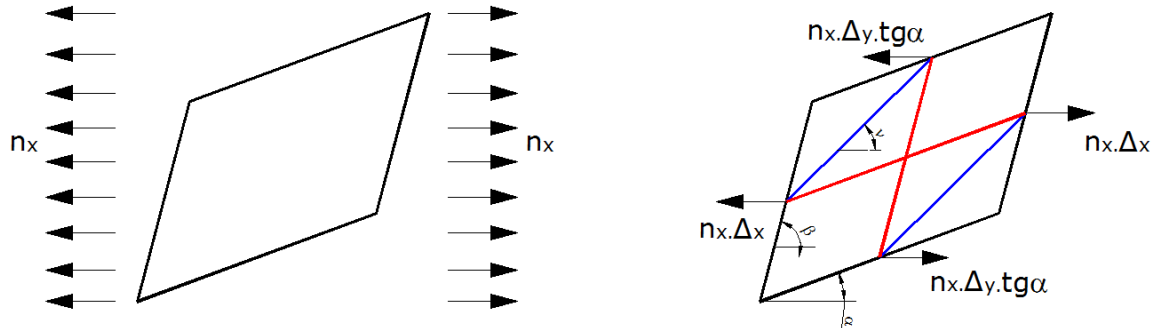


Figura 13 - Equilíbrio do elemento sujeito exclusivamente à força  $n_x$

De acordo com MUTTONI et al (1997), as condições de equilíbrio podem ser formuladas de maneira simples se as seções são colocadas paralelamente à direção das armaduras. Através do ajuste adequado do elemento em relação à direção das armaduras, as resultantes de tensão podem ser facilmente determinadas.

De maneira a se deduzir as forças a serem absorvidas em cada uma das direções propostas para as armaduras, faz-se necessário quantificar as larguras efetivas nas quais são distribuídas as referidas armaduras. A Figura 14 procura apresentar as larguras de distribuição das armaduras nas direções  $\alpha$  e  $\beta$ , bem como da diagonal de concreto comprimido na direção  $v$ . As Figuras 15, 16 e 17 procuram apresentar as deduções das larguras  $\Delta\beta$ ,  $\Delta\alpha$  e  $\Delta v$ , respectivamente.

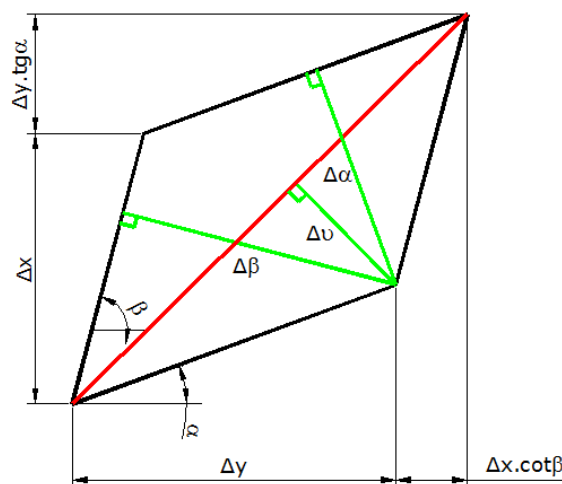


Figura 14 - Larguras de referência para cálculo das resultantes no elemento de membrana



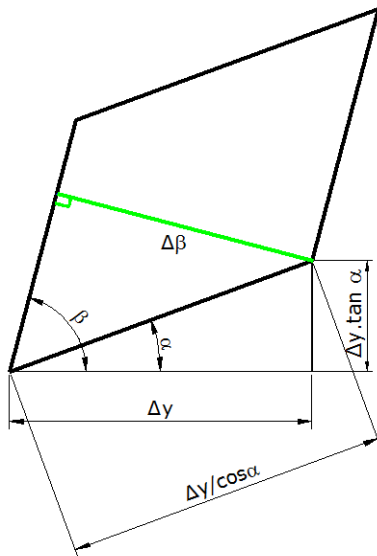


Figura 15 - Cálculo da largura de referência para as armaduras na direção  $\beta$

#### Dedução de $\Delta\beta$

$$\text{sen}(\beta - \alpha) = \frac{\Delta\beta}{(\Delta y / \cos \alpha)}$$

$$\text{sen}\beta \cdot \cos \alpha - \cos \beta \cdot \text{sen} \alpha = \frac{\Delta\beta \cdot \cos \alpha}{\Delta y}$$

$$\Delta\beta = \frac{\Delta y \cdot \text{sen}\beta \cdot \cos \alpha - \Delta y \cdot \cos \beta \cdot \text{sen} \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\Delta\beta = \Delta y \cdot (\text{sen}\beta - \text{tg} \alpha \cdot \cos \beta)$$

#### Dedução de k

$$\text{sen}(90 - \alpha) = \frac{\Delta x \cdot \cot \beta}{k}$$

$$\text{sen}90 \cdot \cos \beta - \cos 90 \cdot \text{sen} \beta = \frac{\Delta x \cdot \cot \beta}{k}$$

$$k = \frac{\Delta x \cdot \cot \beta}{\cos \beta}$$

#### Dedução de $\Delta\alpha$

$$\text{sen}(\beta - \alpha) = \frac{\Delta\alpha}{k}$$

$$\text{sen}(\beta - \alpha) = \frac{\Delta\alpha \cdot \cos \beta}{\Delta x \cdot \cot \beta}$$

$$\text{sen}\beta \cdot \cos \alpha - \cos \beta \cdot \text{sen} \alpha = \frac{\Delta\alpha \cdot \cos \beta}{\Delta x \cdot \cot \beta}$$

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta x \cdot \cot \beta \cdot \text{sen}\beta \cdot \cos \alpha}{\cos \beta} - \frac{\Delta x \cdot \cot \beta \cdot \cos \beta \cdot \text{sen} \alpha}{\cos \beta}$$

$$\Delta\alpha = \Delta x \cdot \cot \beta \cdot \text{tg} \beta \cdot \cos \alpha - \Delta x \cdot \cot \beta \cdot \text{sen} \alpha$$

$$\Delta\alpha = \Delta x \cdot (\cos \alpha - \cot \beta \cdot \text{sen} \alpha)$$

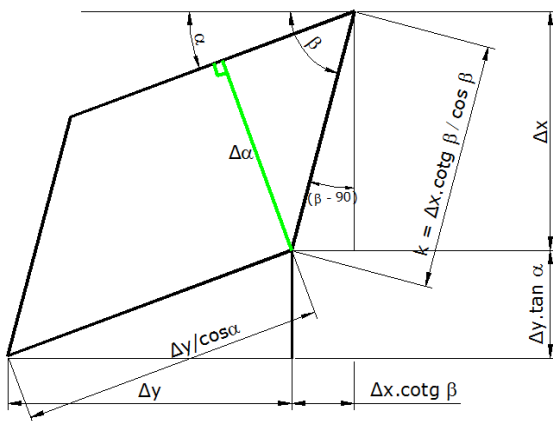
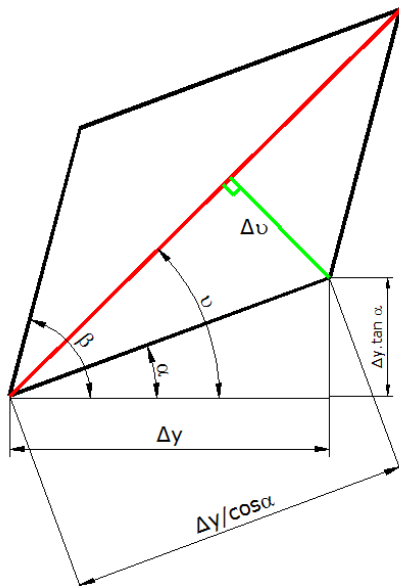


Figura 16 - Cálculo da largura de referência para as armaduras na direção  $\alpha$



### Dedução de $\Delta v$

$$\text{sen}(v - \alpha) = \frac{\Delta v}{\Delta y / \cos \alpha}$$

$$\text{sen } v \cdot \cos \alpha - \cos v \cdot \text{sen } \alpha = \frac{\Delta v \cdot \cos \alpha}{\Delta y}$$

$$\Delta v = \frac{\Delta y \cdot \text{sen } v \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\Delta y \cdot \cos v \cdot \text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\Delta v = \Delta y \cdot \text{sen } v - \Delta y \cdot \cos v \cdot \text{tg } \alpha$$

$$\Delta v = \Delta y \cdot (\text{sen } v - \cos v \cdot \text{tg } \alpha)$$

Figura 17 - Cálculo da largura de referência na direção  $v$  (diagonal de concreto)

As forças resultantes nas armaduras e no concreto, por unidade de largura, para a situação apresentada na Figura 13, isto é, elemento sujeito unicamente à força externa  $n_x$ , são apresentadas a seguir:

$$n_\alpha = \frac{n_x}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{\tan \beta \cdot \tan v}{(\tan \alpha - \tan \beta) \cdot (\tan \alpha - \tan v)} \quad \text{Equação (8)}$$

$$n_\beta = \frac{n_x}{\cos^2 \beta} \cdot \frac{\tan \alpha \cdot \tan v}{(\tan \beta - \tan \alpha) \cdot (\tan \beta - \tan v)} \quad \text{Equação (9)}$$

$$n_v = \frac{n_x}{\cos^2 v} \cdot \frac{\tan \alpha \cdot \tan \beta}{(\tan v - \tan \alpha) \cdot (\tan v - \tan \beta)} \quad \text{Equação (10)}$$

A Figura 18 procura apresentar a ação exclusiva da força externa  $n_y$  sobre o elemento de membrana. Adicionalmente, apresenta-se o modelo de campos de tensões necessário ao equilíbrio do elemento de membrana.

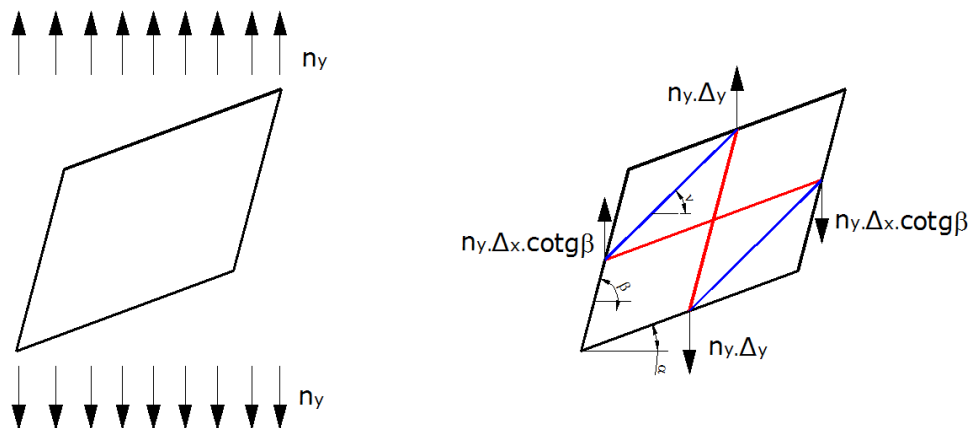


Figura 18 - Equilíbrio do elemento sujeito exclusivamente à força externa  $n_y$

As forças resultantes nas armaduras e no concreto, por unidade de largura, para o elemento sujeito exclusivamente à força externa  $n_y$ , são apresentadas a seguir:

$$n_\alpha = \frac{n_y}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{1}{(\tan \alpha - \tan \beta) \cdot (\tan \alpha - \tan \nu)} \quad \text{Equação (11)}$$

$$n_\beta = \frac{n_y}{\cos^2 \beta} \cdot \frac{1}{(\tan \beta - \tan \alpha) \cdot (\tan \beta - \tan \nu)} \quad \text{Equação (12)}$$

$$n_\nu = \frac{n_y}{\cos^2 \nu} \cdot \frac{1}{(\tan \nu - \tan \alpha) \cdot (\tan \nu - \tan \beta)} \quad \text{Equação (13)}$$

Finalmente, a Figura 19 ilustra o equilíbrio do elemento sujeito exclusivamente à ação da força externa  $n_{xy}$ .

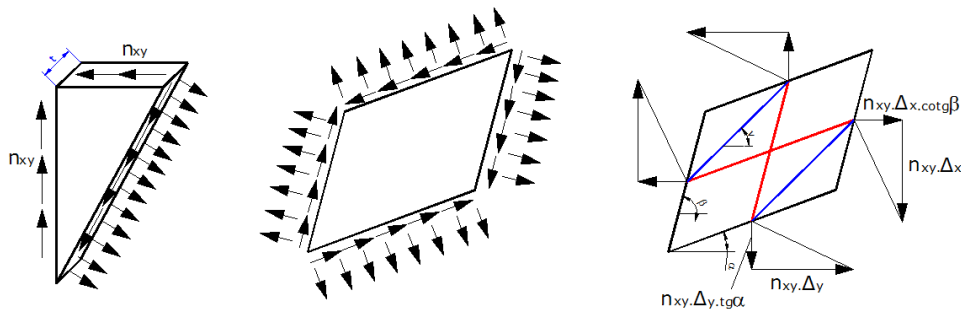


Figura 19 - Equilíbrio do elemento sujeito exclusivamente à força externa  $n_{xy}$

As forças resultantes nas armaduras e no concreto, por unidade de largura, para o elemento sujeito exclusivamente à força externa  $n_{xy}$ , são apresentadas a seguir:

$$n_\alpha = \frac{n_{xy}}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{\tan \beta + \tan \nu}{(\tan \alpha - \tan \beta) \cdot (\tan \alpha - \tan \nu)} \quad \text{Equação (14)}$$

$$n_\beta = \frac{n_{xy}}{\cos^2 \beta} \cdot \frac{\tan \alpha + \tan \nu}{(\tan \beta - \tan \alpha) \cdot (\tan \beta - \tan \nu)} \quad \text{Equação (15)}$$

$$n_\nu = \frac{n_{xy}}{\cos^2 \nu} \cdot \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{(\tan \nu - \tan \alpha) \cdot (\tan \nu - \tan \beta)} \quad \text{Equação (16)}$$

A resultante das forças pode ser obtida por superposição, a partir da seleção da direção do campo de compressão. A superposição das equações apresentadas anteriormente, leva às seguintes equações de dimensionamento:

$$n_{\alpha} = \frac{n_x \cdot \tan \beta \cdot \tan \nu + n_y + n_{xy} \cdot (\tan \beta + \tan \nu)}{\cos^2 \alpha \cdot (\tan \alpha - \tan \beta) \cdot (\tan \alpha - \tan \nu)} \quad \text{Equação (17)}$$

$$n_{\beta} = \frac{n_x \cdot \tan \alpha \cdot \tan \nu + n_y + n_{xy} \cdot (\tan \alpha + \tan \nu)}{\cos^2 \beta \cdot (\tan \beta - \tan \alpha) \cdot (\tan \beta - \tan \nu)} \quad \text{Equação (18)}$$

$$n_{\nu} = \frac{n_x \cdot \tan \alpha \cdot \tan \beta + n_y + n_{xy} \cdot (\tan \alpha + \tan \beta)}{\cos^2 \nu \cdot (\tan \nu - \tan \alpha) \cdot (\tan \nu - \tan \beta)} \quad \text{Equação (19)}$$

Deve-se observar que a escolha de  $\nu$  é restrita pela condição de que a força de compressão  $n_{\nu}$  deve ser negativa, uma vez que o concreto não pode absorver forças de tração. Se  $n_{\alpha}$  ou  $n_{\beta}$  são negativos (força de compressão nas armaduras), essa força pode ser reduzida até zero variando-se  $\nu$ . Por outro lado, se  $n_{\alpha}$  ou  $n_{\beta}$  são positivos uma variação de  $\nu$  causa redução da força em uma armadura e aumento da força em outra. Dessa maneira, a ação interna pode ser selecionada a partir de um critério apropriado tal como: menor quantidade de armadura, menor intensidade de compressão no concreto ou comportamento para cargas de serviço. A quantidade de armaduras nas direções escolhidas, bem como a espessura do elemento de membrana podem ser obtidas a partir das seguintes condições:

$$a_{s\alpha} \cdot f_y \geq n_{\alpha} \quad \text{Equação (20)}$$

$$a_{s\beta} \cdot f_y \geq n_{\beta} \quad \text{Equação (21)}$$

$$t \cdot f_{ce} \geq -n_{\nu} \quad \text{Equação (22)}$$

### 3. Método Corda-Painel ("Stringer-Panel Method")

#### 3.1 Introdução

O Método Corda-Painel (MCP), assim como o Método dos Elementos Finitos, tem suas raízes no Método das Forças, que foi sendo substituído gradualmente pelo Método dos Deslocamentos, devido a maior facilidade de programação deste último.

A primeira aplicação do método foi publicada em 1960, por Argyris e Kelsey, no livro "Energy Theorems and Structural Analysis", sendo que nessa ocasião os pesquisadores denominaram o método de "boom-panel system". A Figura 20 ilustra uma aplicação simples do MCP no início do MEF, onde as cordas ("stringers") são utilizadas para suportar as forças normais e os painéis ("panels") são utilizados para transmitir força cortante.

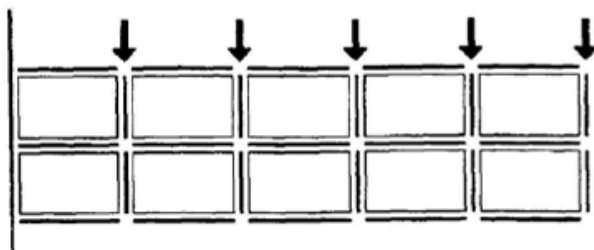


Figura 20 – Modelo Corda-Painel para asa de avião  
(Fonte: BLAAUWENDRAAD & HOOGENBOOM (1996))

Desta maneira, o MCP também é normalmente formulado baseando-se no Método dos Deslocamentos e a sua implementação computacional pode ser feita com grandes facilidades, utilizando os mesmos conceitos de análise matricial contidos no MEF.

De acordo com Simone (1998), o MCP vem sendo utilizado pela indústria aeronáutica desde o começo da década 30 e as primeiras aplicações dentro da engenharia civil se deram com os trabalhos de Lundgren ("Cilindrical Shells", 1949), Nielsen ("On the Strength of Reinforced Concrete Discs", 1971) e Kaern ("The Stringer Method Applied to Discs with Holes", 1979).

Rabbat & Collins (1978) apud SIMONE (1998) apresentaram um modelo tridimensional para a análise de vigas solicitadas genericamente. Neste trabalho, uma viga era modelada através de quatro cordas paralelas que representavam a armadura longitudinal e por quatro painéis de concreto, conforme ilustra a Figura 21.

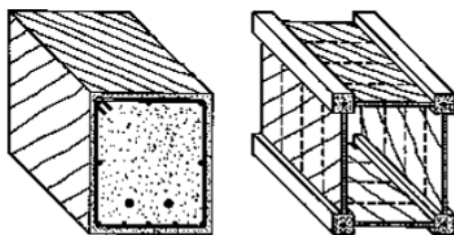


Figura 21 - Modelo Corda-Painel para viga de concreto armado  
(Fonte: SIMONE (1998))

No modelo de Rabbat; Collins (1978) as cordas são responsáveis por absorver os momentos fletores e as forças normais, enquanto que os painéis de concreto são responsáveis pela absorção das forças cortantes e dos momentos torçores. Observa-se claramente que o modelo proposto pelos pesquisadores é o que costuma-se denominar atualmente de “Método Corda-Painel” ou “Stringer-Panel Method”.

De acordo com HOOGENBOOM (1998), um método semelhante foi aplicado em 1979 na Dinamarca, por Nielsen e outros pesquisadores, para análise de paredes de concreto. O método, denominado de “stringer” é muito semelhante ao MCP e otimiza a armadura para um certo carregamento, utilizando o Limite Inferior da Teoria da Plasticidade.

O CEB-FIP Model Code 1990 (1993), nos itens 6.5.1 e 6.5.2, propõe a adoção do método denominado “Stringer-and-Wall”, ou seja, o MCP para a análise dos esforços internos no estado limite último de estruturas constituídas por paredes-finas, na falta de um método mais preciso. Em 1999, o método denominado de “Stringer Method” foi implementado no código dinamarques DS411 (1999), nomeadamente outra referência ao Método Corda-Painel.

Atualmente, várias pesquisas vêm sendo conduzidas no assunto, principalmente na Universidade da Dinamarca, na Escola Politécnica de Milão (Itália) e na Universidade de Delft (Holanda), sendo que estas universidades mantêm um forte intercâmbio de pesquisadores, visando difundir a utilização do Método Corda-Painel. Observa-se que as pesquisas foram mais fortes no final da década de 90 e parecem ter adormecido nos anos 00 em diante.

Apesar do adormecimento mencionado anteriormente, algumas pesquisas têm sido focadas principalmente na expansão do método para o estado tridimensional e para o caso de estruturas bidimensionais com contornos irregulares, isto é, estruturas bidimensionais que não apresentem ortogonalidade entre as suas faces. Também tem sido dada bastante importância à implementação computacional do método.

Um programa computacional bastante interessante, já foi inclusive implementado em ambiente CAD (“Computer Aided Design”), com todas as potencialidades do Método Corda-Painel. Trata-se do programa SPANCAD, desenvolvido por BLAAUWENDRAAD & HOOGENBOOM (1996), na Universidade de Delft e que pôde ter os detalhes conhecidos a fundo por ocasião da presente pesquisa de pós-doutorado. Mais adiante são apresentados detalhes do referido programa.

Dentre as publicações disponíveis sobre o assunto, merecem destaque os trabalhos desenvolvidos por BLAAUWENDRAAD & HOOGENBOOM (1996), BONTEMPi et al. (1998), SIMONE (1998), HOOGENBOOM (1998), SIMONE et al. (1999), BIONDINI et al. (1999) e SIMONE & MALERBA (2001).

### **3.2 Breve Descrição do Método**

De acordo com BLAAUWENDRAAD & HOOGENBOOM (1996), o MCP tem grande aplicabilidade em estruturas de concreto do tipo parede e pode ser considerado como um método intermediário entre o Método das Bielas e o Método dos Elementos Finitos.

O MCP é mais indicado atualmente para estruturas do tipo parede, no entanto, resultados têm demonstrado que o método também pode ser utilizado com sucesso para vigas e consolos. Observa-se que o MCP é um método atrativo, depois do MEF e MB, para uma classe específica de problemas estruturais.

Por enquanto, este método alternativo tem sido desenvolvido apenas para geometrias ortogonais, onde as bordas da estrutura considerada são horizontais e verticais. No entanto, pesquisas têm sido conduzidas visando expandir a aplicação do método para estruturas bidimensionais com geometria não ortogonal.

A idéia principal do MCP consiste no fato de que uma estrutura bidimensional de concreto pode ser modelada dentro de um sistema de cordas ("stringers") e painéis ("panels") retangulares de concreto, conforme ilustra a Figura 22. Através da aplicação do método obtém-se um "Modelo Corda-Painel" para determinada estrutura.

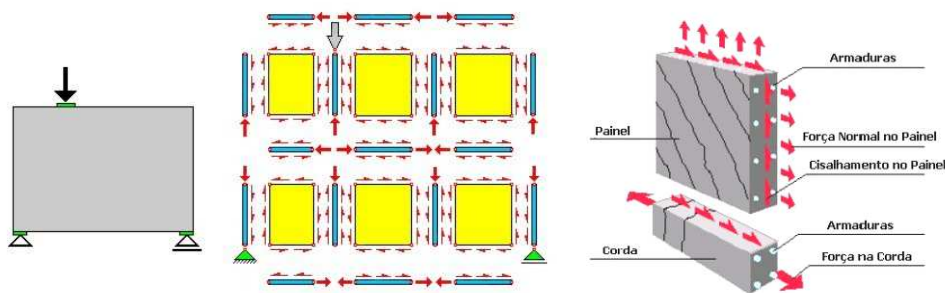


Figura 22 - Estrutura discretizada com Modelo Corda-Painel e detalhe dos elementos

As cordas são utilizadas para a transferência de força normal e podem ser horizontais ou verticais. Desta maneira, uma corda pode resultar tracionada, comprimida ou tracionada-comprimida em um certo trecho da estrutura. As cordas são verificadas da mesma maneira como se verificam os elementos utilizados no Método das Bielas. Por exemplo, se uma corda está sendo comprimida a tensão no concreto deve ser verificada e, caso ultrapasse a tensão efetiva do material, deve-se prever armaduras para o confinamento da corda, visando aumentar a resistência à compressão da mesma. Por outro lado, se uma corda estiver sendo tracionada, despreza-se a resistência do concreto à tração e determina-se a quantidade de armaduras necessárias para combater a força normal atuante na corda.

Os painéis, por sua vez, são elementos retangulares de concreto que são disponibilizados sempre entre quatro cordas. Estes elementos devem possuir uma malha ortogonal de armaduras, capaz de absorver a força cortante desenvolvido no painéis.

De acordo com BLAAUWENDRAAD & HOOGENBOOM (1996), apenas uma força cortante ocorre em um painel e esta força tem o mesmo valor  $v$  por unidade de comprimento em todas as posições do painel. Esta força cortante  $v$  também trabalha na interface entre o painel e as cordas que se localizam em sua borda e, de acordo com as considerações de equilíbrio, a força normal na corda pode aumentar ou diminuir linearmente, conforme ilustra a Figura 23.

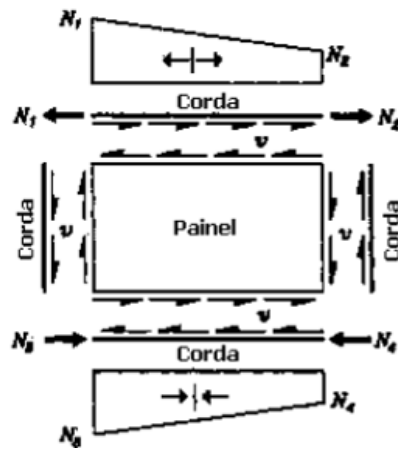


Figura 23 - Comportamento linear das forças normais nas cordas  
(Adaptado de BLAAUWENDRAAD & HOOGENBOOM (1996))

Dessa maneira, observa-se que normalmente o MCP introduz armaduras principais na direção de atuação de cargas e apoios, como também armaduras secundárias, distribuídas em forma de malha nos painéis idealizados para a estrutura.

O esquema de funcionamento do MCP é semelhante ao MB, sendo que os painéis e as cordas, assim como as escoras e os tirantes, devem ser colocados em posições estratégicas no interior da estrutura, visando obter um encaminhamento realista dos esforços.

Uma vez definido um Modelo Corda-Painel para uma determinada estrutura, é feita uma análise linear para a determinação dos esforços atuantes nas cordas e nos painéis. De posse dos esforços é possível quantificar as armaduras resistentes e efetuar o detalhamento do elemento estrutural em análise. A Figura 24 apresenta os esforços obtidos de um Modelo Corda-Painel utilizado para modelar uma viga-parede com um furo na alma, também investigada por Schäfer & Schlaich (1988) através de um Modelo de Escoras e Tirantes.

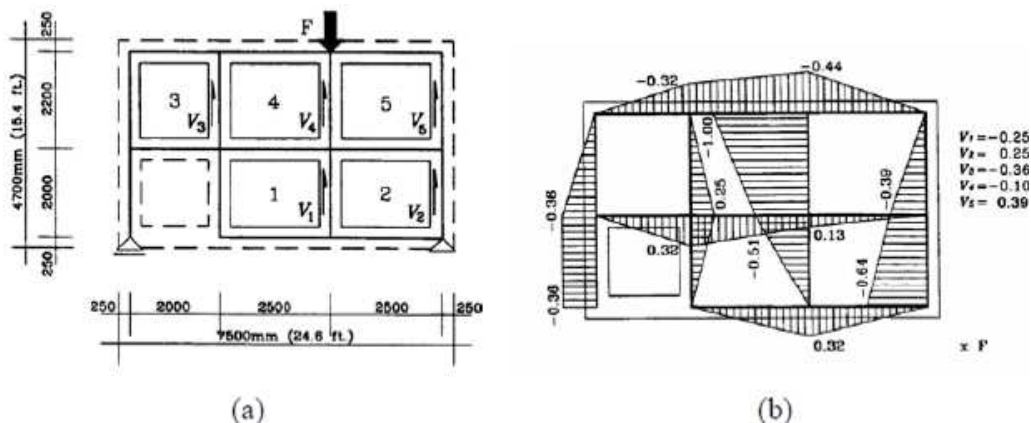


Figura 24 - (a) Viga-parede com furo na alma investigada com um Modelo Corda-Painel e (b) Esforços obtidos na análise linear do modelo  
(Fonte: BLAAUWENDRAAD & HOOGENBOOM (1996))



O problema apresentado na Figura 24 também foi investigado por SIMONE et al. (1999), BIONDINI et al. (1999) e SIMONE & MALERBA (2001). De uma maneira geral, observou-se para este caso isolado que a utilização do MCP leva a adoção de uma armadura em malha maior do que aquela obtida com o Método das Escoras e Tirantes, bem como, a uma armadura principal inferior.

### 3.3 Cálculo Manual Utilizando o Método Corda-Painel

Apesar do Método Corda-Painel estar bem orientado computacionalmente, observa-se que tal alternativa de análise e dimensionamento não teve o merecido tratamento para a condução de cálculos manuais. Em nossa opinião, o método parece ser tão atrativo quanto o Método das Bielas para cálculos manuais, fornecendo respostas rápidas que podem servir de orientação em problemas mais complexos, evitando assim uma análise cega do ponto de vista computacional.

Nesse sentido, acredita-se que o grande mérito da presente pesquisa de curta duração na Universidade de Delft é justamente o questionamento e a orientação de como o presente método pode ser conduzido manualmente. Surpreendentemente, os Prof. Dr. Pierre Hoogemboom e Dr. Angelo Simoni nunca haviam pensado em tal situação, uma vez que sempre haviam pensado no problema somente pelo ponto de vista computacional, tentando otimizar os cálculos.

Observa-se que os dinamarqueses vêm aplicando o método há tempos, inclusive com recomendações pela norma DS411. No entanto, mesmo quando pesquisado o termo "Stringermethoden", nome do método em dinamarques, apenas algumas poucas referências relativas aos pesquisadores Nielsen e Damkilde, da Universidade da Dinamarca, puderam ser encontradas.

Apresenta-se no presente relatório algumas estratégias de cálculo manual para o presente método, fundamentadas a partir dos trabalhos publicados por HAUKSDÓTTIR (2007), JENSEN (2010), NIELSEN & HOANG (2011).

No endereço web a seguir, ([http://it.civil.aau.dk/it/education/sem6\\_2006/projects/group\\_c112/](http://it.civil.aau.dk/it/education/sem6_2006/projects/group_c112/)), pode-se encontrar um trabalho prático muito interessante utilizando o Método Corda-Painel. Apesar da dificuldade de tradução da linguagem original do trabalho (dinamarquês) e da identificação dos autores/título do trabalho, pode-se entender relativamente bem o desenvolvimento matemático e a rotina de cálculo na determinação das forças internas em uma peça estrutural, conforme ilustra a Figura 25. Conforme pode-se observar, apresenta-se a geometria acompanhada das condições de contorno, bem como as forças desenvolvidas no interior dos painéis e nas cordas.

No livro de JENSEN (2010) também foi possível encontrar boas passagens ilustrando a aplicação do Modelo Corda-Painel, porém mais uma vez a barreira de linguagem se faz presente, uma vez que a publicação também encontra-se em dinamarques. No entanto, o desenvolvimento matemático mais uma vez pode ser compreendido com certo nível de atenção e conhecimento prévio do método.



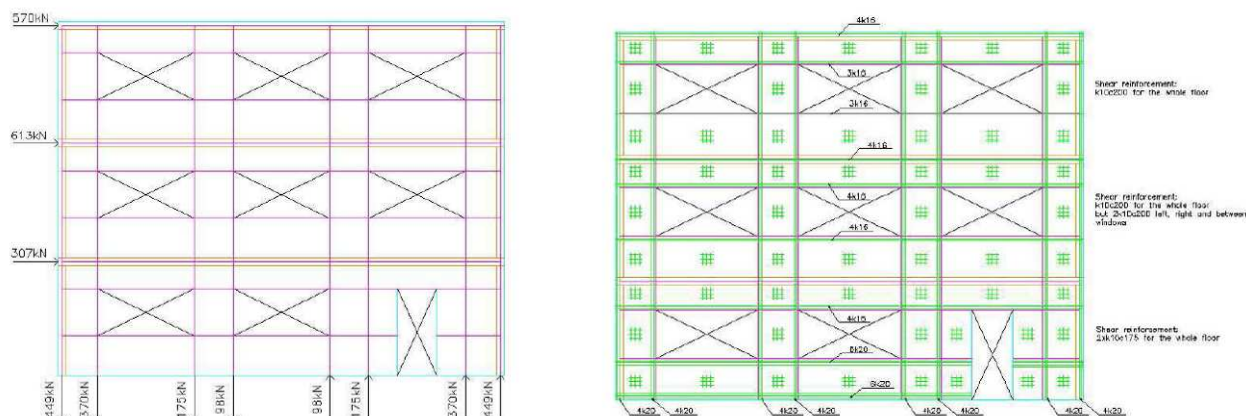


Figura 26 - Parede estrutural modelada com o Método Corda-Painel  
(Fonte: HAUKSDÓTTIR (2007))

De acordo com Hauksdóttir (2007), o método é baseado no Limite Inferior da Teoria da Plasticidade, isto é, a capacidade de carga esperada de uma estrutura dimensionada com o auxílio de tal método será igual ou inferior a carga de ruína real. Ainda de acordo com o pesquisador, o método pode ser utilizado em qualquer material onde a Teoria da Plasticidade seja válida, ou seja, materiais em que as deformações plásticas são muito menores do que as deformações plásticas numa situação extrema.

Ainda de acordo com HAUKSDÓTTIR (2007), o método vem sendo utilizado há muitos anos nas estruturas metálicas e, recentemente, vem ganhando espaço no dimensionamento de estruturas em concreto. O processo basicamente começa imaginando a estrutura situada em um sistema de coordenadas com eixos horizontais em x e eixos verticais em y. Em seguida, a estrutura é basicamente dividida em cordas ("stringers") paralelas aos eixos x e y, e os pontos onde as cordas se encontram recebem números. Entre as cordas definidas formam-se áreas retangulares fechadas (painéis) que também são numerados, conforme ilustra o exemplo apresentado na Figura 27.

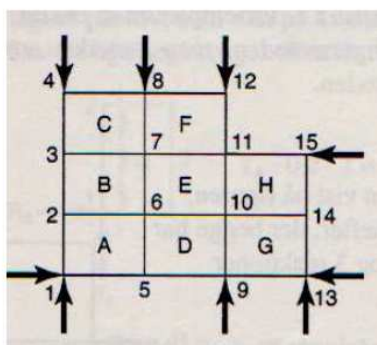


Figura 27 - Estratégia de numeração no processo manual do Método Corda-Painel  
(Fonte: HAUKSDÓTTIR (2007))

Conforme pode-se observar pela Figura 27, a estrutura foi dividida em nós, cordas e painéis. De maneira geral, uma corda é definida como a distância entre dois nós consecutivos. Por outro lado, uma "linha-corda" é definida por todas as cordas que constituem um segmento. De acordo com o código DS411, a largura da

corda não deve ser superior a 20% da menor largura do painel adjacente que forma ângulos retos com a referida corda.

A ideia é de que as tensões de cisalhamento nos painéis e as forças normais nas cordas podem ser calculadas considerando apenas condições de equilíbrio. As cargas e as reações são definidos como cargas concentradas atuantes nos nós ou como tensões de cisalhamento atuantes nas cordas. As cordas absorvem as tensões axiais e podem estar tracionadas ou comprimidas. Por outro lado, os painéis (retângulos) absorvem apenas tensões de cisalhamento e as mesmas são consideradas constantes dentro de cada painel. Devido ao fato da tensão de cisalhamento ser contante dentro dos painéis, a força nas redondezas das cordas varia linearmente entre os nós.

De acordo com HAUKSDÓTTIR (2007), é melhor calcular a tensão de cisalhamento nos painéis e depois a força nas cordas. As cordas tracionadas necessitam de aço para absorver tração, de maneira que a armadura necessária pode ser calculada conforme a seguir:

$$A_{s,t} = \frac{F_t}{f_{yd}} \quad \text{Equação (23)}$$

Uma vez que os cálculos são conduzidos com base na Teoria da Plasticidade, se a corda estiver comprimida a tensão no concreto não pode ser superior à resistência plástica do concreto, ou seja,  $v \cdot f_{cd} = 0,5 \cdot f_{cd}$ , onde  $v$  é conhecido como fator de eficiência do concreto. Assim, a área das cordas comprimidas pode ser calculada conforme abaixo:

$$A_{c,c} = \frac{F_c}{v \cdot f_{cd}} = \frac{F_c}{0,5 \cdot f_{cd}} \quad \text{Equação (24)}$$

Se o concreto não for capaz de absorver toda a tensão de compressão mesmo com o aumento da espessura, a corda também pode ter uma armadura complementar de confinamento, de maneira a aumentar a resistência. SIMONE (1998) apresenta meios de se dimensionar a armadura de confinamento longitudinal e transversal, bem como apresenta um equacionamento bastante útil para o cálculo de aberturas de fissuras nas cordas.

Nos painéis, a armadura é colocada de maneira paralela e ortogonal ao sistema de coordenadas ou também às cordas. A armadura nos painéis pode ser obtida conforme abaixo, onde  $b$  é a espessura dos painéis:

$$A_s = \frac{\tau_{\max} \cdot b}{f_{yd}} \quad \text{Equação (25)}$$

Evidentemente, todo esforço direcionado para o dimensionamento de elementos de membrana pelo autor do presente relatório, também pode ser extremamente útil no dimensionamento dos painéis. Para tanto, faz-se referência aos trabalhos de SOUZA (2011).

Aparentemente, o Método Corda-Painel foi desenvolvido em 1979 por Nielsen, objetivando o dimensionamento de paredes estruturais. No entanto, observa-se que o tratamento do referido autor é na maior parte do tempo focado em um desenvolvimento matemático, deixando para segundo plano as aplicações práticas. Apresenta-se na sequência, algumas informações recentes obtidas sobre o método, onde pode-se encontrar algumas breves passagens sobre o cálculo manual.

De acordo com NIELSEN & HOANG (2011), pode-se começar impondo a distribuição da tensão de cisalhamento nos painéis, de maneira que as forças nas cordas podem ser facilmente determinadas. Tome-se, por exemplo, a estrutura apresentada na Figura 28.

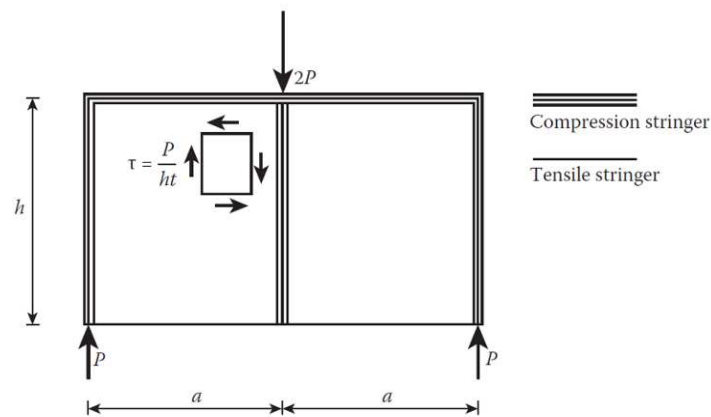


Figura 28 - Estrutura discretizada com modelo Corda-Painel  
(Fonte: NIELSEN & HOANG (2011))

Se for utilizada uma malha ( $a \times h$ ), pode-se obter a tensão de cisalhamento em cada retângulo, a partir da transmissão das forças nas cordas verticais. Dessa maneira, a tensão de cisalhamento em cada retângulo será dada por  $\tau = P/h.t$ , onde  $t$  é a espessura do painel.

A força nas cordas horizontais varia linearmente de  $P.a/h$  até zero, indo do centro para as extremidades. Deve-se observar que a corda superior é de tração, enquanto a corda inferior estará tracionada. Conseqüentemente, a estrutura necessitará de armadura discreta na borda inferior e armadura em malha distribuída nos painéis.

A Figura 29 apresenta uma estrutura sujeita a uma abertura, sendo que a tensão de cisalhamento pode ser livremente escolhida nas áreas 1 e 2. Dessa maneira, a tensão de cisalhamento na área 3 pode ser determinada pela projeção vertical. De maneira análoga, se o valor da tensão de cisalhamento é escolhido para a área 4, a tensão de cisalhamento na área 5 pode ser determinada também por projeção vertical. As tensões de cisalhamento nas áreas 6 e 7 são determinadas por projeção horizontal, enquanto a tensão de cisalhamento na área 8 pode ser determinada tanto por projeção horizontal quanto por vertical, deixando uma equação com equação de controle.

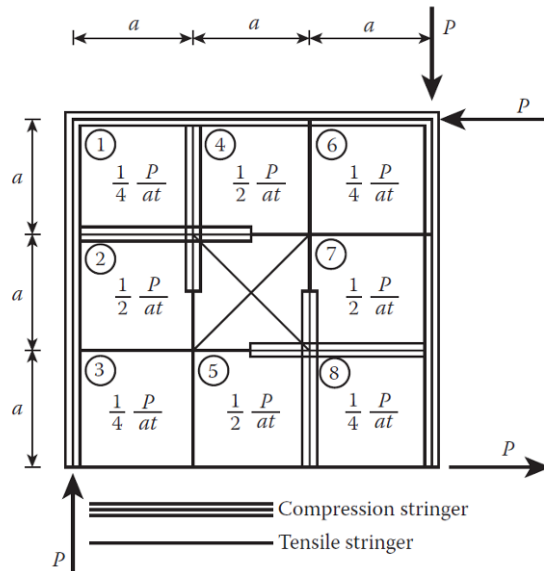


Figura 29 - Estrutura com abertura discretizada com modelo Corda-Painel  
(Fonte: NIELSEN & HOANG (2011))

A Figura 30 apresenta um dente Gerber modelado com um modelo Corda-Painel. Os valores da tensão de cisalhamento nas áreas 1 e 2 são estaticamente determinados. Os valores das tensões de cisalhamento nas áreas 3, 7, 4, 8, 5 e 9 podem ser livremente escolhidos. Dessa maneira, as tensões de cisalhamento nas áreas 11, 12 e 13 podem ser encontradas via projeção vertical e as tensões nas áreas 6 e 10 via projeção horizontal. Finalmente, a tensão de cisalhamento na área 14 pode ser encontrada via projeção horizontal ou vertical, restando assim uma equação de controle.

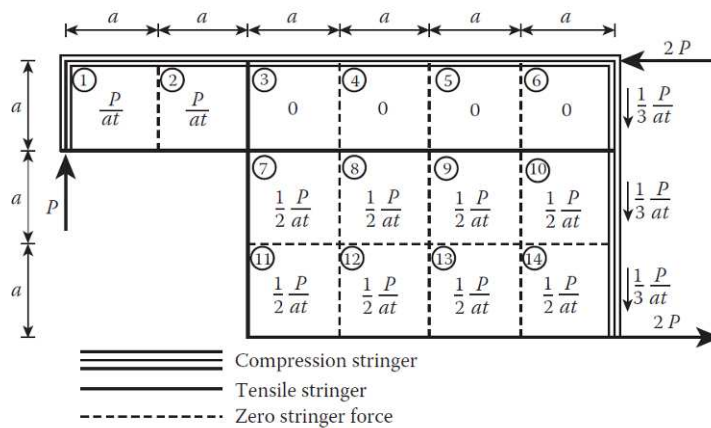


Figura 30 - Consolo discretizado com modelo Corda-Painel  
(Fonte: NIELSEN & HOANG (2011))

Um conjunto estaticamente admissível de tensões de cisalhamento nos painéis é apresentado na Figura 3. Observa-se a necessidade do detalhamento de uma armadura de suspensão, isto é, da corda vertical que une as áreas 2, 3, 7 e 11.

A Figura 31 apresenta um nó de pórtico sujeito a um momento fletor  $M$  que tende a abrir a conexão. Conforme pode-se observar, o momento fletor é transformado em um sistema de forças estaticamente equivalentes (binários) atuando nas linhas da malha proposta. É evidente que as tensões de cisalhamento nas áreas 1 e 3 serão nulas. Por outro lado, através de projeções horizontais ou verticais através da área 2, pode-se encontrar que  $\tau = M/h_1.h_2.t$ . As forças nas cordas decresce linearmente de um valor máximo absoluto até zero, nas regiões de união com a área 2.

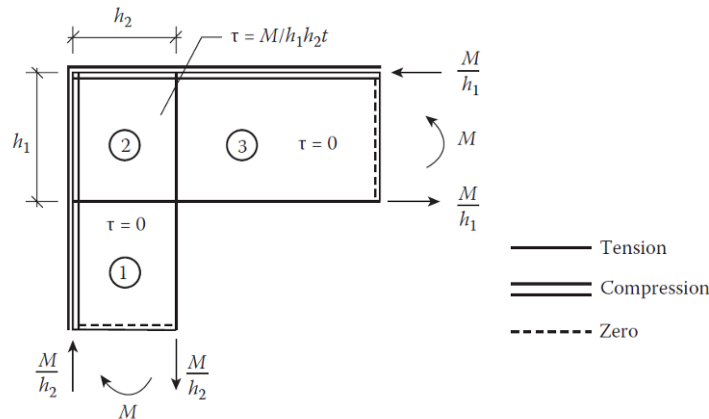


Figura 31 - Nó de pórtico discretizado com modelo Corda-Painel  
(Fonte: NIELSEN & HOANG (2011))

A Figura 32 apresenta o problema de reforço de uma região ao redor de uma abertura numa zona sujeita a cisalhamento. Para uma certa distância da abertura, a tensão de cisalhamento é  $\tau$ . A abertura tem dimensões retangulares de  $a \times b$ , com lados paralelos às seções sujeitas a cisalhamento puro. Imagina-se que a armadura adicional deva ser determinada pelos comprimentos  $x$  e  $y$  ilustrados na Figura 32.

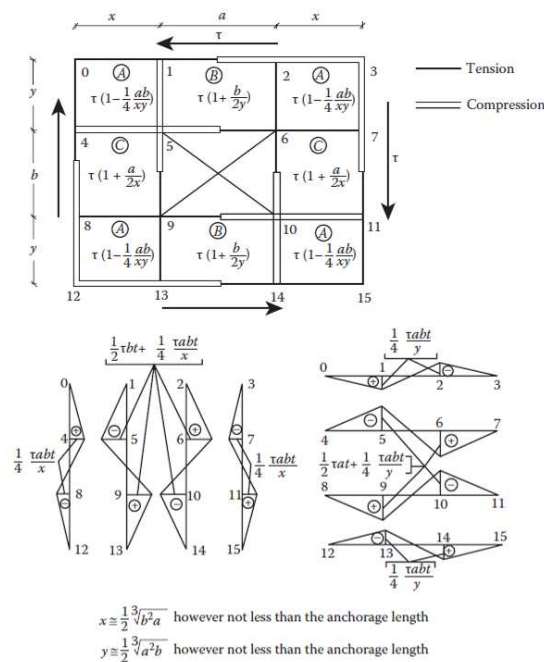


Figura 32 - Estrutura com abertura discretizada com modelo Corda-Painel  
(Fonte: NIELSEN & HOANG (2011))

As tensões de cisalhamento são facilmente determinadas pelas projeções horizontais e verticais, requerendo que a armadura adicional seja aquela de uma seção com o mesmo comprimento na zona sujeita a cisalhamento puro. Para este caso, obtém-se valores iguais de cisalhamento nas quatro áreas A. Em seguida, as áreas B terão o mesmo valor e similarmente para as áreas C.

Se a abertura não é retangular, a solução é ainda aplicável se uma zona retangular sobrepondo a referida abertura for utilizada. A área entre a abertura e a zona retangular deve ser evidentemente reforçada com alguma armadura extra. Maiores informações sobre reforço de regiões com abertura utilizando o Método Corda-Painel podem ser obtidas em Kaern (1979).

Nos exemplos apresentados, o sinal das tensões de cisalhamento são perceptíveis. Em casos mais complexos, uma convenção para as tensões de cisalhamento pode ser adotada e os cálculos podem ser conduzidos de maneira sistemática a partir da convenção adotada.

Quando a distribuição das tensões de cisalhamento é estaticamente indeterminada, as tensões de cisalhamento podem ser escolhidas de maneira a se obter uma armadura total mínima. No que se refere a cálculos manuais, alguns engenheiros experientes são capazes de chegar a boas soluções com poucas iterações. Normalmente, o procedimento inicia-se com uma solução que satisfaça o equilíbrio, sendo que essa solução é modificada até que se obtenha a armadura mais econômica. Atualmente, programas computacionais capazes de fornecer soluções com armaduras mínimas baseando-se no Método Corda-Painel são descritos em DAMKILDE et al (1994).

Conforme pode-se observar, as pesquisas referentes ao Método Corda-Painel são mais analisadas do ponto de vista computacional do que manual. Porém, durante a presente visita e, reunindo as poucas informações presentes na literatura, pode-se estabelecer um procedimento prático para o cálculo manual utilizando o Método Corda-Painel.

Surpreendentemente, a rotina desenvolvida para cálculos manuais se apresentou bastante prática e com resultados confiáveis, podendo levar a uma obtenção de resultados inclusive mais veloz que o Método das Escoras e Tirantes. Tal possibilidade é extremamente interessante para os engenheiros envolvidos com projetos estruturais que ocasionalmente necessitam dimensionar estruturas complexas cujo nível de forças internas é desconhecido.

O método manual ora aqui proposto possibilita pelo menos a condução de verificações rápidas, evitando assim análises cegas normalmente conduzidas em programas computacionais avançados. Dessa maneira, o engenheiro pode verificar rapidamente os esforços em algumas seções e pode confrontar os resultados obtidos numericamente com a utilização de ferramentas mais avançadas. Tal procedimento pode dar mais segurança no dimensionamento de estruturas complexas e pode evitar que novas ruínas, tal como a ocorrida com a plataforma Sleipner, sejam evitados.



Outro ponto interessante do procedimento manual ora aqui proposto está na fortes características de ensino. Através de exemplos simples, pode-se ilustrar de maneira bastante lógica a analogia como o Método dos Elementos Finitos é concebido. Adicionalmente, conforme se aumenta o número de cordas e painéis do modelo, há uma convergência de resultados do método Corda-Painel para o que seria obtido utilizando um modelo de elementos finitos bidimensional.

Tendo-se em vista o curto espaço de tempo na realização da presente pesquisa, os resultados obtidos manualmente na Universidade de Delft, bem como os procedimentos necessários para tal rotina serão compilados futuramente em um artigo científico a ser publicado em parceria com o Prof. Dr. Pierre Hoogenboom.

### 3.4 Breve Descrição do Programa SpanCad

O MCP foi implementado por BLAAUWENDRAAD & HOOGENBOOM (1996) no ambiente gráfico do programa AutoCAD, utilizando as linguagens de programação AutoLISP (pré e pós-processador) e C++ (processador). O programa denominado de SPANCAD (Stringer PANEL Computer Aided Design) é livremente distribuído na Internet (<http://www.mechanics.citg.tudelft.nl/spancad/>) e ilustrado na Figura 33.

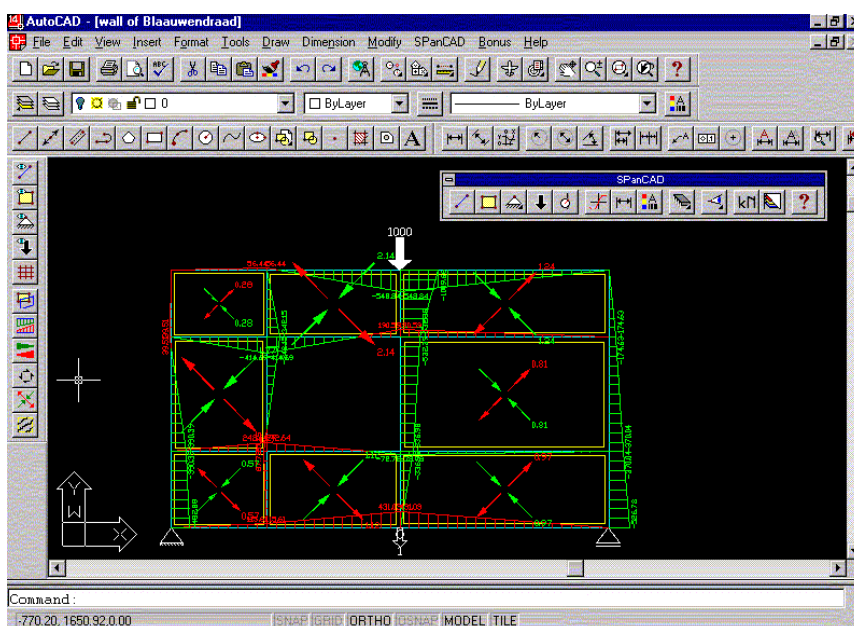


Figura 33 - Interface do programa SpanCad no interior do programa AutoCAD.

O SPANCAD chama a atenção pela sua interatividade com o usuário e também pelo fato de que uma vez calculada a estrutura esta pode ser imediatamente detalhada utilizando os recursos de desenho e plotagem disponíveis no ambiente do AutoCAD.

Basicamente, o processo de funcionamento do programa compreende o desenho da geometria da estrutura, a definição das cordas e dos painéis, a definição das propriedades dos materiais e as condições de vinculação. Todas essas etapas são simplesmente desenhadas utilizando os recursos do AutoCAD.

Após desenhar a estrutura executa-se uma primeira análise elástica, objetivando determinar as forças atuantes nas cordas e nos painéis. A partir das forças obtidas adicionam-se as armaduras necessárias à estrutura e executa-se uma análise não-linear, capaz de prever o comportamento da estrutura no estado limite último.

A partir dos resultados gerados, tais como aberturas de fissuras, deflexões, forças, direções principais de tensão e carga de ruína, tomam-se as decisões a respeito das armaduras introduzidas. Observa-se que o cálculo das armaduras não é feito de maneira automática pelo programa.

No programa SPANCAD as cordas e os painéis podem ser investigados de cinco maneiras distintas: "Linear", "Cracked", "Real", "Strengthening" e "Plastic". Estes comportamentos para os materiais são ilustrados na Figura 34 e descritos com maiores detalhes a seguir.

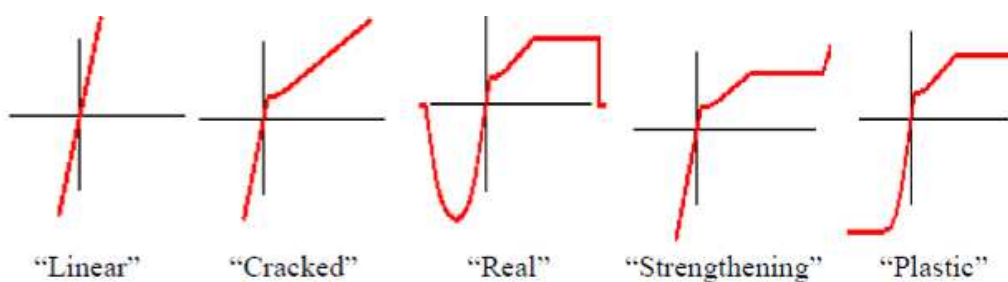


Figura 34 – Modos de comportamento dos materiais disponíveis no SPANCAD

(Fonte: SPANCAD Help (2001))

No modo "Linear", o concreto e as armaduras são modelados como materiais elástico-lineares. Dessa maneira, as cordas e os painéis não sofrem fissuração, escoamento, esmagamento ou ruptura. Além disso, os painéis só carregam cisalhamento em suas faces.

No modo "Cracked" o concreto comprimido tem comportamento elástico-linear e o concreto tracionado é modelado realisticamente, incluindo fissuração e "tension-stiffening". A armadura é admitida como sendo elástico-linear tanto para tração quanto para compressão.

No Modo "Real", o concreto e o aço são modelados precisamente, de maneira que as cordas e os painéis representem o seu comportamento verdadeiro, adequado com o comportamento encontrado em ensaios experimentais.

No modo "Strengthening", a corda ou o painel apresentam um comportamento no modo "Real" antes da ruína. No entanto, após a ruptura os elementos se enrijecem o quanto podem, de maneira a suportar as forças que ainda existem.

Finalmente, no Modo "Plastic" a corda ou o painel também apresentam um comportamento no modo "Real" antes da ruína. No entanto, após a ruptura os elementos mantêm a capacidade de suporte e passam a escoar.

A Figura 35 procura apresentar os resultados de uma viga-parede simulada com o Modelo Corda-Painel utilizando o programa SpanCAD. Conforme pode-se observar, o programa é capaz de fornecer os esforços internos, as deformações, as quantidades de armaduras e as aberturas de fissuras, constituindo-se em uma excelente ferramenta para a análise e dimensionamento de estruturas especiais.

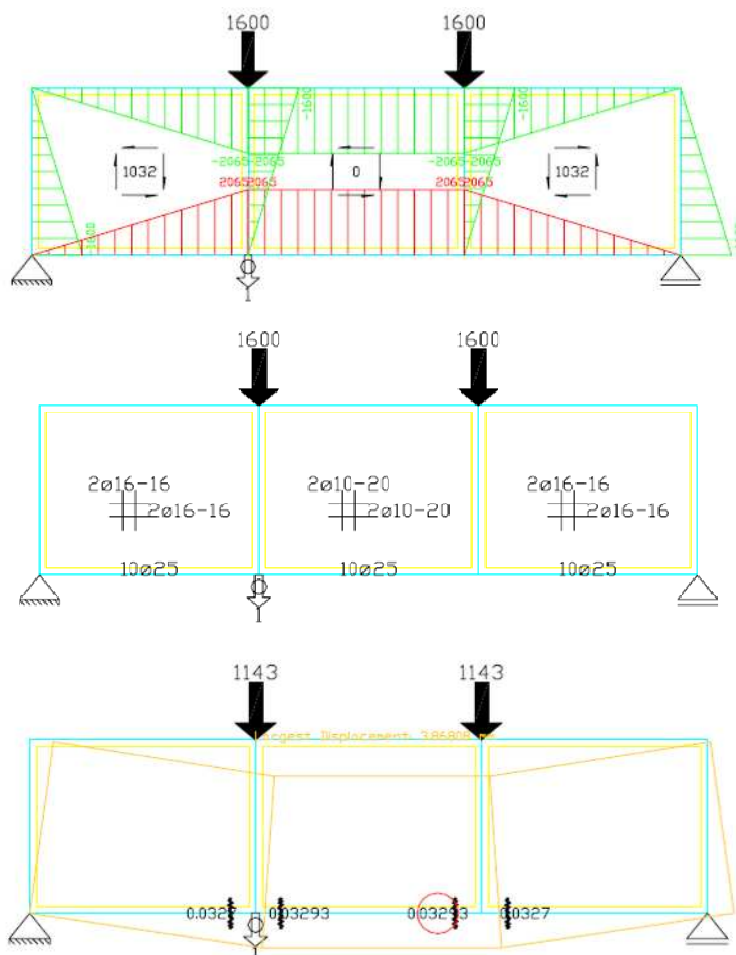


Figura 35 - Viga-parede modelada no programa SpanCAD

Conforme mencionado, o programa SpanCAD conta com todos os benefícios gráficos do programa AutoCAD. No entanto, durante o estágio realizado na Universidade de Delft, foi possível obter o código-fonte do programa principal (processador) em linguagem Pascal, conforme apresentado no ANEXO D do presente relatório.

Uma vez que o referido código foi explicado em minúcias durante a visita pelo Prof. Dr. Pierre Hoogemboom, espera-se no futuro implementar os conceitos do Modelo Corda-Painel em um programa próprio a ser compilado na plataforma Matlab, a partir do código-fonte obtido. Acredita-se que dessa maneira, os usuários poderão obter maior independência do plataforma AutoCAD.

## 4. Conclusões

O Método dos Campos de Tensão se apresenta como uma alternativa bastante interessante para a análise e dimensionamento de estruturas em concreto estrutural sujeitas a descontinuidades. Além disso, pode-se entender o método como uma ferramenta um pouco mais completa do que o Método das Bielas, possibilitando ao calculista um tratamento mais genérico e relativamente mais preciso devido a justificativas que serão descritas adiante.

Na realidade, modelos de escoras e tirantes obtidos a partir da aplicação do Método das Bielas nada mais são do que as resultantes obtidas de campos de tensão elásticas. Ou seja, a partir dos campos de tensão, pode-se facilmente obter-se modelos de escoras e tirantes. Por outro lado, observa-se que é difícil definir campos de tensão a partir de modelos de escoras e tirantes. Tal motivo, é apenas uma das justificativas que garantem ao Método do Campo das Tensões uma análise mais genérica.

Além disso, os modelos de escoras e tirantes obtidos através do Método das Bielas não levam em consideração a presença de armaduras mínimas e nem o efeito do posicionamento preferencial das armaduras nas direções horizontais e verticais. Na realidade, os modelos de escoras e tirantes acabam sendo ajustados, tendo-se em vista que normalmente os campos de tração conduzem a posicionamentos inclinados para as armaduras.

Utilizando-se o Método dos Campos de Tensão, pode-se avaliar com maior precisão o efeito das armaduras mínimas no fluxo interno de tensões. Além disso, o posicionamento das armaduras nas direções preferenciais, ou seja, nas direções horizontais e verticais, também pode ser melhor avaliado. Ou seja, pelo Método dos Campos de Tensão leva-se em conta que o posicionamento das armaduras contribua no fluxo interno de tensões, contribuindo assim para um modelo matemático mais preciso em relação à peça real. Além disso, questões como deformabilidade e aberturas de fissuras podem ser tratadas de uma maneira mais eficiente no Método dos Campos de Tensão.

No presente trabalho, teve-se acesso a informações privilegiadas do Método dos Campos de Tensão na École Polytechnique Fédérale de Lausanne (Suíça), uma vez que orientador do presente estágio, Prof. Dr. Aurelio Muttoni, realizou seus estudos na Universidade de Zurich, escola onde o método foi inicialmente proposto na década de 70. Dessa maneira, pode-se obter detalhes sobre a implementação do programa JConc, utilizado para a simulação de estruturas de concreto utilizando a referida metodologia.

O programa JConc se mostrou uma ferramenta muito eficiente para a simulação de estruturas de concreto utilizando o Método dos Campos de Tensão. Basicamente, os materiais são considerados com comportamento elasto-plástico, com a possibilidade de redução da capacidade resistente do concreto à compressão devido a deformações transversais de tração. O problema é tratado levando-se em consideração a presença de malha de elementos finitos com elementos sempre triangulares e a armadura é tratada de maneira discreta. Os resultados obtidos demonstraram que a ferramenta pode ser utilizada com grande versatilidade tanto para atividades pedagógicas quanto para atividades envolvendo a prática profissional.

Na oportunidade da realização do presente estágio, o Prof. Dr. Daniel Alexander Kuchma (University of Illinois at Urbana-Champaign) estava em seu período sabático na École Polytechnique Fédérale de Lausanne, de maneira que foi possível restabelecer uma nova aproximação (o mesmo já havia sido nosso orientador de pós-doutorado em 2006) com boa perspectiva para novas parcerias.

Para um primeiro momento, ficou combinada a condução de trabalhos futuros envolvendo a análise não-linear de diversas vigas-parede já ensaiadas experimentalmente na University of Illinois (KUCHMA et al (2008)). A ideia é comparar os resultados experimentais com resultados numéricos de análises não-lineares a serem conduzidas nos programas ATENA, CAST e JCONC. Esse trabalho deve produzir excelente interação para os próximos três anos, envolvendo pesquisadores da École Polytechnique Fédérale de Lausanne, University of Illinois at Urbana-Champaign e Universidade Estadual de Maringá.

Uma outra abordagem interessante para a modelagem de estruturas de concreto estrutural sujeitas à descontinuidades é o Modelo Corda-Painel, cujas minúcias puderam ser verificadas em profundidade na Delft University of Technology (Holanda), junto ao Prof. Dr. Pierre Hoogenboom. Acredita-se que a condução do presente trabalho de pesquisa ajudou a chamar a atenção para um detalhe que até o momento vinha tendo pouca atenção: o cálculo manual utilizando o referido método.

Dessa maneira, durante o período em que se ficou na Delft University of Technology, procurou-se dar prioridade ao entendimento de como o processo poderia ser conduzido manualmente. Dessa maneira, foi possível estabelecer uma rotina de cálculo que se demonstrou bastante atrativa, conduzindo a resultados precisos e tão rápidos quanto àqueles obtidos com o Método das Bielas.

Observou-se que o procedimento proposto possui grande potencial didático e pode ilustrar de maneira bastante eficiente o funcionamento do Método dos Elementos Finitos. Além disso, observa-se que o procedimento manual, apesar de pouco abordado na literatura, pode dar aos calculistas excelentes respostas em problemas complexos, evitando assim ruínas como aquelas verificadas com a plataforma Sleiþner.

Por outro lado, após o entendimento completo do procedimento de cálculo manual, procurou-se dominar o procedimento numérico de cálculo, particularmente através do estudo detalhado do código-fonte do programa SpanCAD. Na ocasião, o Prof. Dr. Pierre Hoogenboom discorreu sobre a formulação dos elementos corda e painel, bem como explicou em detalhes o fluxograma de cálculo existente no interior do programa. Um código-fonte em linguagem Pascal, idêntico àquele implementado no AutoCad para os cálculos utilizando o programa SpanCAD é apresentado em maiores detalhes no Anexo D do presente trabalho.

Finalmente, ficou combinada a redação de artigos focados na condução manual do Método Corda-Painel, de maneira que mais calculistas possam ter acesso a tal procedimento. Ainda, espera-se que futuramente o código-fonte obtido em linguagem Pascal possa ser implementado na plataforma Matlab, usufruindo assim de todos os benefícios gráficos e numéricos que a referida ferramenta possui, ganhando-se assim autonomia da plataforma do AutoCad, normalmente onerosa para estudantes e engenheiros.

## 5. Referências Bibliográficas

ACI Committee 318, "Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-2005) and Commentary (ACI 318R-2002), APPENDIX A: Strut-And-Tie Models". American Concrete Institute, Detroit, 2005.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. "NBR 6118 – Projeto de Estruturas de Concreto - Procedimento", Rio de Janeiro, 2003.

BIONDINI, F.; BONTEMPI, F.; MALERBA, P. G.; SIMONE, A. "Stringer Panel Modelling of R.C. Elements". International Conference On Advances In Structural Engineerings And Mechanics (ASEM99), 1., Seoul, Korea, 1999. Proceedings.

BLAAUWENDRAAD, J.; HOOGENBOOM, P. C. J. "Stringer Panel Model for Structural Concrete Design". ACI Structural Journal, v.93, n.3, p.295-305, May- June, 1996.

BONTEMPI, F; MALERBA, P. G.; SIMONE, A. "Progetto di Strutture in C.A Con Un Modello a Panelli e Correnti". Congresso Biennale C.T.E., Padova, 1998. Atti. p.77-87, 1998.

CANADIAN STANDARDS ASSOCIATION. "CSA Standard-A23.3-94 – Design of Concrete Structures". Rexdale, 1994.

COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. "CEB-FIP Model Code 1990". Thomas Telford Services, Ltd., London, 1993.

DAMKILDE, L.; OLSEN, J. F.; POULSEN, P. N.. "A Program for Limit State Analysis of Plane, Reinforced Concrete Plates by the Stringer Method". Byggningsstat. Medd., vol. 65, n. 1, pp. 1-26, 1994.

DRUCKER, D. C. . "On Structural Concrete and the Theorems of Limit Analysis". Publications, v.21, International Association for Bridge and Structural Engineering, Zürich, pp. 49-59, 1961.

DS411. Norm for Betonkonstruktioner, "Code of Practice for the Structural use of Concrete" (in Danish), Dansk Standard, Copenhagen, Denmark, 1999.

EHE. "Instrucción de Hormigón Estructural". Norma Espanhola, 2a Edição, Madrid, 1999.

FILHO, W. P.. "Ancoragem Mecânica em Vigas de Transição - Aplicação dos Critérios do ACI-318(2008)". Palestra, 50º Congresso Brasileiro do Concreto, Salvador, 2008.

HAUKSDÓTTIR, B.. "Analysis of a Reinforced Concrete Shear Wall". Master's dissertation, Technical University of Denmark, 2007.

HOOGENBOOM, P.C.J. "Discrete Elements and Nonlinearity in Design of Structural Concrete Walls". Dissertação (Mestrado) - Delf University of Technology, 1998.

JENSEN, B. C.. "Betonelementbyggeriers Statik" (in Danish), Polyteknisk Forlag, Lyngby, 2010

KAERN, J.. "The Stringer Method Applied to Discs with Holes". IABSE Colloquium, Copenhagen, 1979, Session II, Plasticity in Reinforced Concrete, Final Report, v. 29, pp. 87-93, 1979.

KOSTIC, N.. "Topologie des Champs de Contraintes pour le Dimensionnement des Structures en Béton Armé". École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Lausanne, 2009.

KUCHMA, D. A.; YINDEESUK, S.; NAGLE, T.; HART, J.; LEE, H. H.. "Experimental Validation of Strut-and-Tie Method for Complex Regions". ACI Structural Journal, v.105, n.5, 2008.

LEONHARDT, F.; MÖNNING, E.. "Construções de Concreto - Volume 1: Princípios Básicos do Dimensionamento de Estruturas de Concreto Armado". Rio de Janeiro, Editora Interciência, 1977.

LEONHARDT, F.; MÖNNING, E.. "Construções de Concreto - Volume 2: Casos Especiais de Dimensionamento de Estruturas de Concreto". Rio de Janeiro, Editora Interciência, 1978.

LEONHARDT, F.; MÖNNING, E.. "Construções de Concreto - Volume 3: Princípios Básicos sobre a Armação de Estruturas de Concreto Armado". Rio de Janeiro, Editora Interciência, 1978.

MARTI, P.. "On the Plastic Analysis of Reinforced Concrete". ("Zur Plastischen Berechnung von Stahlbeton"). Institut für Baustatik und Konstruktion, Bericht, n.104, ETH Zürich, 1980.

MÖRSCH, E.. "Reinforced Concrete Construction, Theory and Application" ("Der Eisenbetonbau - Seine Theorie und Anwendung", Verlag von Konrad Wittwer, 1908.

MUTTONI, A.; RUIZ, M. F.; KOSTIC, N.. Discussion of the paper "Factors Affecting Strength of Elements Designed Using Strut-and-Tie Models". ACI Structural Journal, 104-S36, USA, pp. 233-235, 2008.

MUTTONI, A.; RUIZ, M. F.. " Dimensionamiento y Verificación del Hormigón Estructural Mediante el Método de los Campos de Tensiones". Hormigón y Acero, n.242, 206.

MUTTONI, A; RUIZ, M. F.; KOSTIC, N.. "Champs de Contraintes et Méthode des Bielles-et-Tirants - Application dans la Conception et le Dimensionnement des Structures en Béton Armé". École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Lausanne, 2011.

MUTTONI, A; SCHAWARTZ, J.; THURLIMANN, B.. "Design of Concrete Structures with Stress Fields". Birkhäuser, Basel, Boston and Berlin, Switzerland, 1997. 145 pp.

NIELSEN, M. P. *Limit Analysis and Concrete Plasticity*. New Jersey: Prentice- Hall Series in Civil Engineering, Englewood Cliffs, 1984.

NIELSEN, M. P.; BRAESTRUP, M. V.; JENSEN; B. B.; BACH, F.. "Concrete Plasticity, Beam Shear - Shear in Joints - Punching Shear". Special Publication, Danish Society for Structural Science and Engineering, 1978.

NIELSEN, M. P.; HOANG, L.C.. "Limit Analysis and Concrete Plasticity", CRC Press, 3rd ed., Boca Raton, FL, USA, 2011.

PRAGER, W.; HODGE, P. G.. "Theory of Perfectly Plastic Solids". John Wiley & Sons, New York, 1951.

RITTER, W.. "The Hennebique Construction Method" ("Die Bauweise Hennebique"), Schweizerische Bauzeitung, v XXXIII, n.07, 41-61, 1899.

RUIZ, M. F.. "Théorie de la Plasticité: Théorèmes Statique et Cinématique - Leçon 5". Notas de aula da disciplina "Structures en béton", École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Lausanne, 2009.

RUIZ, M. F.; MUTTONI, A.. "On the Development of Suitable Stress Fields for Structural Concrete". ACI Structural Journal, v.104, n.04, July-August, 2007.

SCHÄFER, K.; SCHLAICH, J.. "Design and Detailing of Structural Concrete Using Strut-and-Tie Models". The Structural Engineer, vol.69, n.06, mar., 1991.

SCHÄFER, K.; SCHLAICH, J.. "Design and Detailing of Structural Concrete Using Strut-and-Tie Models". The Structural Engineer, vol.69, n.06, mar., 1991.

SCHLAICH, J.; SCHAFFER, K.; JENNEWEIN, M.. "Toward a Consistent Design of Reinforced Concrete Structures". Journal of Prestressed Concrete Structures, v.32, n.03, pp.74-150, 1987.

SIMONE, A. "Progetto di Strutture in C.A. con un Modello a Pannelli e Correnti". Tese (Doutorado) - Politecnico di Milano, School of Engineering, Milano, Italy, 1998.

SIMONE, A.; MALERBA, P. G. "Modelli Discreti Nel Progetto Di Strutture in C.A., il Modello Stringer-and-Panel". Workshop: Tecniche di progettazione strutand-tie di elementi strutturali in cemento armato, Firenze, p.41-51, 16, 2001. Atti della giornata di studio.

SIMONE, A.; MALERBA, P. G.; BONTEMPI, F. "Modellazione di Zone Diffusive in Elementi in C.A. Mediante il Modello a Pannelli e Correnti". GIORNATE AICAP '99, Torino, p.359-368, 4-6 Novembre, 1999. Atti.



SOUZA, R. A. " Análise e Dimensionamento de Elementos de Membrana em Concreto Estrutural". Relatório de Bolsa Produtividade em Pesquisa (Cnpq), Maringá, 2011.

SOUZA, R. A.. Discussion of the paper "Factors Affecting Strength of Elements Designed Using Strut-and-Tie Models". ACI Structural Journal, 104-S36, USA, pp. 232-233, 2008.

THÜRLIMANN, B.; GROB, J., LÜCHINGER, P.. "Torsion, Biegung und Schub in Stahlbetonträgern", Institut für Baustatik und Konstruktion". ETH Zürich, April, 1975.

THÜRLIMANN, B.; MARTI, P; PRALONG, J; RITZ, P; ZIMMERLI, B.. "Application of the Plasticity Theory to Reinforced Concrete" ("Anwendung der Plastizitätstheorie auf Stahlbeton", Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, 1983.

# **ANEXO A**

Prof. Dr. Aurelio Muttoni  
EPFL-ENAC-IBETON  
Station 18  
Bâtiment GC  
CH-1015 Lausanne

TÉLÉPHONE: +41 (0)21 693 2881  
TÉLÉFAX : +41 (0)21 693 5884  
e-mail : aurelio.muttoni@epfl.ch

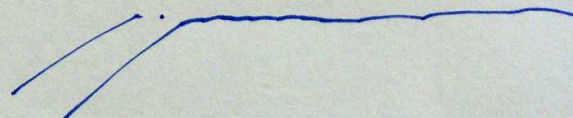
Lausanne, 15 July 2011

To Whom It May Concern:

With this letter I certify that Dr. Rafael Alves de Souza has been an academic host at my laboratory during the period of July the 4<sup>th</sup>, 2011, to July the 15<sup>th</sup>, 2011.

During his academic leave, he has given a seminar entitled: "Collapses of structures: learning from errors" (July the 14<sup>th</sup>, 2011) and has been involved with some members of my team in development of stress field models by using the software Jconc. The exchanges of ideas with Dr. Alves de Souza have been very productive and we plan to keep in contact for future joint researches.

Sincerely yours,



Prof. Dr. Aurelio Muttoni

## **ANEXO B**



# **ANEXO C**

Delft University of Technology  
Faculty of Civil Engineering and Geosciences  
Stevinweg 1  
2628 CN Delft  
the Netherlands

**Subject: Visit of Prof. Rafael Alves de Souza**

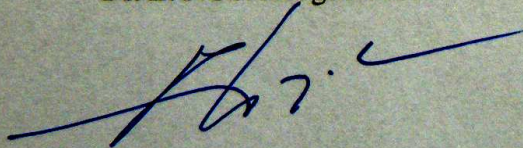
Dear Lady, Sir,

Prof. Rafael Alves de Souza worked at Delft University from July 18 to 22, 2011. He visited the laboratories and met faculty members of the Concrete Section, the Structural Mechanics Section and the Materials Recycling Section. He initiated scientific discussions on reinforced concrete design and future developments in this field. In addition, teaching methods for reinforced concrete design and analysis have been discussed. We exchanged ideas for research cooperation. A mutual publication has been planned on design of reinforced concrete deep beams using the stringer-panel method.

His visit and contribution are greatly appreciated by Delft University faculty members.

Yours sincerely,

Dr. Ir. P.C.J. Hoogenboom

A handwritten signature in blue ink, appearing to be "P.C.J. Hoogenboom".

Assistant professor of structural mechanics  
Faculty of Civil Engineering and Geosciences  
Delft University of Technology

Phone: 0031 15 278 8081

Fax: 0031 15 278 5767

Email: [p.c.j.hoogenboom@tudelft.nl](mailto:p.c.j.hoogenboom@tudelft.nl)

# **ANEXO D**



```

Matrix method of structural analysis
{ Elements: 3D bar, 2D bar, shear panel, quadrilateral shear panel, stringer, tying }
{ No nodes only degrees of freedom }
{ Pascal }
{ P.C.J. Hoogenboom, Last update 22 May. 2008 }

const
  MaxNrDofs=300; MaxNrStrs=50; MaxNrPanels=40; MaxNrQPanels=8; MaxNrBar3Ds=20; MaxNrBar2Ds=6;
  MaxNrForces=10; MaxNrTyings=10; MaxNrFixedDofs=10;
var
  FPtr: TextFile;
  i: integer;
  t,w,E,G: double;

{input of Kernel}
  NrDofs,NrStrs,NrPanels,NrQPanels,NrBar3Ds,NrBar2Ds,
  NrForces,NrTyings,NrFixedDofs: integer; // number of dofs, number
of stringers, etc.
  StrDof: array[1..MaxNrStrs,1..3]of integer; // dof numbers of a
stringer
  StrEA,Strl: array[1..MaxNrStrs]of double; // extensional stiffness
and length of a stringer
  PanelDof: array[1..MaxNrPanels,1..4]of integer; // dof numbers of a panel
  PanelGt,Panela,Panelb: array[1..MaxNrPanels]of double; // shear stiffness, width
and length of a panel
  QPanelDof: array[1..MaxNrQPanels,1..4]of integer; // dof numbers of a
quadrilateral panel
  x1,x2,x3,x4,y1,y2,y3,y4, // vertex coordinates of a
quadrilateral panel
  QPanelGt,QPanelEt: array[1..MaxNrQPanels]of double; // extentional Young's
modulus, shear modulus of the quadrilateral panels
  Bar3DDof: array[1..MaxNrBar3Ds,1..6]of integer; // dof numbers of a Bar3D
  Bar3DEA, // extensional stiffness
  Bar3Da,Bar3Db,Bar3Dc: array[1..MaxNrBar3Ds]of double; // dimensions
  Bar2DDof: array[1..MaxNrBar2Ds,1..4]of integer; // dof numbers of 2D bars
  Bar2DEA,Bar2Da,Bar2Db: array[1..MaxNrBar2Ds]of double; // extensional stiffness
and dimensions of Bar2D elements
  ForceDof: array[1..MaxNrForces]of integer; // numbers of dofs at wich
a force is imposed
  Force: array[1..MaxNrForces]of double; // imposed force
  Slave,Master1,Master2: array[1..MaxNrTyings]of integer; // dof numbers of slave and
two masters. (Tyings that try to make a slave into a master are ignored. However, a master can be
made a slave, therefore, mind the order of the tyings.)
  Factor1,Factor2: array[1..MaxNrTyings]of double; // factors of the masters
(uSlave=Factor1*uMaster1+Factor2*uMaster2)
  FixedDof: array[1..MaxNrFixedDofs]of integer; // numbers of dofs at wich
displacement is imposed (Will be ignored if imposed to a slave.)(If multiple displacements are
imposed to one dof only the last will be processed.)
  Disp: array[1..MaxNrFixedDofs]of double; // imposed displacements

{output of Kernel}
  u: array[1..MaxNrDofs]of double; // displacements of dofs
  StrN1,StrN2: array[1..MaxNrStrs]of double; // begin and end axial
forces in the stringers
  PanelTaut: array[1..MaxNrPanels]of double; // shear stresses in the
panels
  QPanelTaut: array[1..MaxNrQPanels]of double; // shear stresses in the
quadrilateral panels
  Bar3DN: array[1..MaxNrBar3Ds]of double; // axial forces in the
Bar3Ds
  Bar2DN: array[1..MaxNrBar2Ds]of double; // axial forces in the
Bar2Ds
  SupportR: array[1..MaxNrFixedDofs]of double; // reaction forces in the
dofs for which displacements are imposed

{variables used in Kernel}
  D: array[1..MaxNrQPanels]of double; // stiffness of a
quadrilateral panel
  Be: array[1..MaxNrQPanels,1..4]of double; // kinematic vector of a
quadrilateral panel
  f: array[1..MaxNrDofs]of double; // force vector
  s: array[1..MaxNrDofs,1..MaxNrDofs]of double; // stiffness matrix
  sR: array[1..MaxNrFixedDofs,1..MaxNrDofs]of double; // lines removed from the
stiffness matrix to insert the fixed dofs
  fR: array[1..MaxNrFixedDofs]of double; // elements removed from
the force vector to insert the fixed dofs

```

```

procedure QPanelStiffness(x1,x2,x3,x4, y1,y2,y3,y4, t,E,G: double; var D,B1,B2,B3,B4: double );
var
c1,c2,c3,c4, s1,s2,s3,s4, r1,r2,r3,r4, k1,k2,k3,k4, l1,l2,l3,l4,
t1,t2,t3,t4, g1,g2,g3,g4, j1,j2,j3,j4, p1,p2,p3,p4, h1,h2,h3,h4,
A,k,s: double;
i,j: integer;
begin
c1:=x2-x1; c2:=x3-x2; c3:=x4-x3; c4:=x1-x4;
s1:=y2-y1; s2:=y3-y2; s3:=y4-y3; s4:=y1-y4;
r1:=x1*y2-x2*y1; r2:=x2*y3-x3*y2; r3:=x3*y4-x4*y3; r4:=x4*y1-x1*y4;
k1:=c2*(s3*r4-s4*r3)-s2*(c3*r4-c4*r3)+r2*(c3*s4-c4*s3);
k2:=c1*(s3*r4-s4*r3)-s1*(c3*r4-c4*r3)+r1*(c3*s4-c4*s3);
k3:=c1*(s2*r4-s4*r2)-s1*(c2*r4-c4*r2)+r1*(c2*s4-c4*s2);
k4:=c1*(s2*r3-s3*r2)-s1*(c2*r3-c3*r2)+r1*(c2*s3-c3*s2);
if (G>0.0)and(E>0.0)and(k1>0.0)and(k2>0.0)and(k3>0.0)and(k4>0.0)then
begin
l1:=sqrt(c1*c1+s1*s1); l2:=sqrt(c2*c2+s2*s2);
l3:=sqrt(c3*c3+s3*s3); l4:=sqrt(c4*c4+s4*s4);
A:=0.50*(r1+r2+r3+r4);
k:=0.25*(k1+k2+k3+k4);
B1:=-k1/k*l1; B2:= k3/k*l3;
B3:=-k4/k*l4; B4:= k2/k*l2;
t1:=c4-c2; t2:=s4-s2; t3:=c3-c1; t4:=s3-s1;
g1:=(c1*t1+s1*t2)/(s1*t1-c1*t2);
g2:=(t3*c2+t4*s2)/(t4*c2-t3*s2);
g3:=(c3*t1+s3*t2)/(s3*t1-c3*t2);
g4:=(t3*c4+t4*s4)/(t4*c4-t3*s4);
t1:=0.5*(c1*s3-c3*s1); t2:=0.5*(c2*s4-c4*s2);
j1:=A+t2; j2:=A-t1; j3:=A-t2; j4:=A+t1;
t1:=0.5/G; t2:=2.0/E;
p1:=t1+t2*g1*g1; p2:=t1+t2*g2*g2;
p3:=t1+t2*g3*g3; p4:=t1+t2*g4*g4;
h1:=k1/k; h1:=h1*h1;
h2:=k2/k; h2:=h2*h2;
h3:=k3/k; h3:=h3*h3;
h4:=k4/k; h4:=h4*h4;
s:=h1*p1*j1+h2*p2*j2+h3*p3*j3+h4*p4*j4;
D:=2.0*t/s
end
else
begin
B1:=0; B2:=0; B3:=0; B4:=0;
D:=0
end
end;

procedure Kernel();
var
i,j,k,l,kk,ll: integer;
a,b,c,e: double;
s1: array[1..6,1..6]of double;
begin
{initialise stiffness matrix}
for i:=1 to NrDofs do
for j:=1 to NrDofs do
s[i,j]:=0;
{assemble stringers}
s1[1,1]:= 4; s1[1,2]:=-6; s1[1,3]:= 2;
s1[2,1]:=-6; s1[2,2]:=12; s1[2,3]:=-6;
s1[3,1]:= 2; s1[3,2]:=-6; s1[3,3]:= 4;
for i:=1 to NrStrs do
begin
c:=StrEA[i]/StrL[i];
for k:=1 to 3 do
begin
kk:=StrDof[i,k];
for l:=1 to 3 do
begin
ll:=StrDof[i,l];
s[kk,ll]:=s[kk,ll]+c*s1[k,l]
end
end
end;
end;
{assemble panels}
for i:=1 to NrPanels do
begin
a:=Panela[i]/Panelb[i];
e:=1/a;

```

```

c:=PanelGt[i];
sl[1,1]:= a; sl[1,2]:=-a; sl[1,3]:= 1; sl[1,4]:=-1;
sl[2,1]:=-a; sl[2,2]:= a; sl[2,3]:=-1; sl[2,4]:= 1;
sl[3,1]:= 1; sl[3,2]:=-1; sl[3,3]:= e; sl[3,4]:=-e;
sl[4,1]:=-1; sl[4,2]:= 1; sl[4,3]:=-e; sl[4,4]:= e;
for k:=1 to 4 do
begin
kk:=PanelDof[i,k];
for l:=1 to 4 do
begin
ll:=PanelDof[i,l];
s[kk,ll]:=s[kk,ll]+c*sl[k,l]
end
end
end;
{assemble quadrilateral shear panels}
for i:=1 to NrQpanels do
begin
QPanelStiffness(x1[i],x2[i],x3[i],x4[i],y1[i],y2[i],y3[i],y4[i],1,QPanelEt[i],QPanelGt[i],D[i],Be[i,
1],Be[i,2],Be[i,3],Be[i,4]);
for k:=1 to 4 do
begin
kk:=QPanelDof[i,k];
for l:=1 to 4 do
begin
ll:=QPanelDof[i,l];
s[kk,ll]:=s[kk,ll]+Be[i,k]*D[i]*Be[i,l]
end
end
end;
{assemble Bar3Ds}
for i:=1 to NrBar3Ds do
begin
a:=Bar3Da[i];
b:=Bar3Db[i];
c:=Bar3Dc[i];
e:=sqrt(a*a+b*b+c*c);
e:=Bar3DEA[i]/(e*e*e);
sl[1,1]:= a*a; sl[1,2]:= a*b; sl[1,3]:= a*c; sl[1,4]:=-a*a; sl[1,5]:=-a*b; sl[1,6]:=-a*c;
sl[2,1]:= b*a; sl[2,2]:= c*b; sl[2,3]:= b*c; sl[2,4]:=-b*a; sl[2,5]:=-b*b; sl[2,6]:=-b*c;
sl[3,1]:= c*a; sl[3,2]:= b*b; sl[3,3]:= c*c; sl[3,4]:=-c*a; sl[3,5]:=-c*b; sl[3,6]:=-c*c;
sl[4,1]:=-a*a; sl[4,2]:=-a*b; sl[4,3]:=-a*c; sl[4,4]:= a*a; sl[4,5]:= a*b; sl[4,6]:= a*c;
sl[5,1]:=-b*a; sl[5,2]:=-b*b; sl[5,3]:=-b*c; sl[5,4]:= b*a; sl[5,5]:= b*b; sl[5,6]:= b*c;
sl[6,1]:=-c*a; sl[6,2]:=-c*b; sl[6,3]:=-c*c; sl[6,4]:= c*a; sl[6,5]:= c*b; sl[6,6]:= c*c;
for k:=1 to 6 do
begin
kk:=Bar3DDof[i,k];
for l:=1 to 6 do
begin
ll:=Bar3DDof[i,l];
s[kk,ll]:=s[kk,ll]+e*sl[k,l]
end
end
end;
{assemble Bar2Ds}
for i:=1 to NrBar2Ds do
begin
a:=Bar2Da[i];
b:=Bar2Db[i];
e:=sqrt(a*a+b*b);
e:=Bar2DEA[i]/(e*e*e);
sl[1,1]:= a*a; sl[1,2]:= a*b; sl[1,3]:=-a*a; sl[1,4]:=-a*b;
sl[2,1]:= b*a; sl[2,2]:= b*b; sl[2,3]:=-b*a; sl[2,4]:=-b*b;
sl[3,1]:=-a*a; sl[3,2]:=-a*b; sl[3,3]:= a*a; sl[3,4]:= a*b;
sl[4,1]:=-b*a; sl[4,2]:=-b*b; sl[4,3]:= b*a; sl[4,4]:= b*b;
for k:=1 to 4 do
begin
kk:=Bar2DDof[i,k];
for l:=1 to 4 do
begin
ll:=Bar2DDof[i,l];
s[kk,ll]:=s[kk,ll]+e*sl[k,l]
end
end
end;
{attach a small spring to each dof - trick to prevent bad models from falling over}
for i:=1 to NrDofs do
s[i,i]:=s[i,i]+1e-100;

```

```

{process imposed forces}
for i:=1 to NrDofs do
  f[i]:=0;
for i:=1 to NrForces do
  f[ForceDof[i]]:=Force[i];
{process tyings}
for i:=1 to NrTyings do
  begin
  kk:=Slave[i];
  k:=Master1[i];
  l:=Master2[i];
  if (s[k,k]<>-1)and(s[l,l]<>-1) then
    begin
    for j:=1 to NrDofs do
      begin
      s[k,j]:=s[k,j]+Factor1[i]*s[kk,j];
      s[l,j]:=s[l,j]+Factor2[i]*s[kk,j];
      s[kk,j]:=0
      end;
    f[k]:=f[k]+Factor1[i]*f[kk];
    f[l]:=f[l]+Factor2[i]*f[kk];
    f[kk]:=0;
    s[kk,kk]:=-1;
    s[kk,k]:=Factor1[i];
    s[kk,l]:=Factor2[i]
    end
  end;
{process imposed displacements}
for i:=1 to NrFixedDofs do
  begin
  k:=FixedDof[i];
  for j:=1 to NrDofs do
    sR[i,j]:=s[k,j];
  fR[i]:=f[k];
  if s[i,i]<>-1 then
    begin
    for j:=1 to NrDofs do
      s[k,j]:=0;
    s[k,k]:=1;
    f[k]:=Disp[i]
    end
  end;
end;

{sweep matrix}
for i:=1 to NrDofs-1 do
  begin
  {largest of column}
  a:=abs(s[i,i]);kk:=i;
  for j:=i+1 to NrDofs do
    begin
    if abs(s[j,i])>a then
      begin
      a:=abs(s[j,i]);kk:=j
      end
    end;
  {swap rows}
  if kk<>i then
    begin
    for k:=i to NrDofs do
      begin
      a:=s[i,k];
      s[i,k]:=s[kk,k];
      s[kk,k]:=a
      end;
    a:=f[i];f[i]:=f[kk];f[kk]:=a
    end;
  {sweep column}
  for j:=i+1 to NrDofs do
    begin
    a:=s[j,i]/s[i,i];
    if a<>0.0 then
      begin
      for k:=i to NrDofs do
        s[j,k]:=s[j,k]-a*s[i,k];
      f[j]:=f[j]-a*f[i]
      end
    end
  end;
end;
{back substitution}
for i:=NrDofs downto 1 do

```

```

begin
a:=0.0;
for k:=i+1 to NrDofs do
  a:=a+u[k]*s[i,k];
u[i]:=(f[i]-a)/s[i,i]
end;

{stringer forces}
for i:=1 to NrStrs do
  begin
  StrN1[i]:=StrEA[i]/Strl[i]*(-4*u[StrDof[i,1]]+6*u[StrDof[i,2]]-2*u[StrDof[i,3]]);
  StrN2[i]:=StrEA[i]/Strl[i]*( 2*u[StrDof[i,1]]-6*u[StrDof[i,2]]+4*u[StrDof[i,3]])
  end;

{panel forces}
for i:=1 to NrPanels do
  PanelTaut[i]:=PanelGt[i]*( (u[PanelDof[i,2]]-u[PanelDof[i,1]])/Panelb[i] +(u[PanelDof[i,4]]-
u[PanelDof[i,3]])/Panela[i] );

{quadrilateral panel forces}
for i:=1 to NrQPanels do
  QPanelTaut[i]:=D[i]*( u[QPanelDof[i,1]]*Be[i,1] +u[QPanelDof[i,2]]*Be[i,2]
+u[QPanelDof[i,3]]*Be[i,3] +u[QPanelDof[i,4]]*Be[i,4] );

{Bar3D forces}
for i:=1 to NrBar3Ds do
  begin
  a:=Bar3Da[i]*Bar3Da[i] +Bar3Db[i]*Bar3Db[i] +Bar3Dc[i]*Bar3Dc[i];
  Bar3DN[i]:=Bar3DEA[i]/a*( Bar3Da[i]*(u[Bar3DDof[i,4]]-u[Bar3DDof[i,1]])
+Bar3Db[i]*(u[Bar3DDof[i,5]]-u[Bar3DDof[i,2]]) +Bar3Dc[i]*(u[Bar3DDof[i,6]]-u[Bar3DDof[i,3]]) )
  end;

{Bar2D forces}
for i:=1 to NrBar2Ds do
  begin
  a:=Bar2Da[i]*Bar2Da[i] +Bar2Db[i]*Bar2Db[i];
  Bar2DN[i]:=Bar2DEA[i]/a*( Bar2Da[i]*(u[Bar2DDof[i,3]]-u[Bar2DDof[i,1]])
+Bar2Db[i]*(u[Bar2DDof[i,4]]-u[Bar2DDof[i,2]]) )
  end;

{support reactions}
for i:=1 to NrFixedDofs do
  begin
  a:=0;
  for j:=1 to NrDofs do
    a:=a+u[j]*sR[i,j];
  SupportR[i]:=a-fR[i]
  end;
end; // of Kernel

begin
NrDofs:=30; NrStrs:=12; NrPanels:=4; NrQPanels:=0; NrBar3Ds:=0; NrBar2Ds:=0; NrForces:=3;
NrTyings:=0; NrFixedDofs:=3;
StrDof[1,1]:=4; StrDof[1,2]:=5; StrDof[1,3]:=6;
StrDof[2,1]:=6; StrDof[2,2]:=7; StrDof[2,3]:=8;
StrDof[3,1]:=12; StrDof[3,2]:=9; StrDof[3,3]:=1;
StrDof[4,1]:=13; StrDof[4,2]:=10; StrDof[4,3]:=2;
StrDof[5,1]:=14; StrDof[5,2]:=11; StrDof[5,3]:=3;
StrDof[6,1]:=15; StrDof[6,2]:=16; StrDof[6,3]:=17;
StrDof[7,1]:=17; StrDof[7,2]:=18; StrDof[7,3]:=19;
StrDof[8,1]:=23; StrDof[8,2]:=20; StrDof[8,3]:=12;
StrDof[9,1]:=24; StrDof[9,2]:=21; StrDof[9,3]:=13;
StrDof[10,1]:=25; StrDof[10,2]:=22; StrDof[10,3]:=14;
StrDof[11,1]:=26; StrDof[11,2]:=27; StrDof[11,3]:=28;
StrDof[12,1]:=28; StrDof[12,2]:=29; StrDof[12,3]:=30;
t:=0.12;
w:=0.020;
E:=3e7;
StrEA[1]:=E*w*t; StrL[1]:=0.5;
StrEA[2]:=E*w*t; StrL[2]:=0.5;
StrEA[3]:=E*w*t; StrL[3]:=0.5;
StrEA[4]:=E*w*t; StrL[4]:=0.5;
StrEA[5]:=E*w*t; StrL[5]:=0.5;
StrEA[6]:=E*w*t; StrL[6]:=0.5;
StrEA[7]:=E*w*t; StrL[7]:=0.5;
StrEA[8]:=E*w*t; StrL[8]:=0.5;
StrEA[9]:=E*w*t; StrL[9]:=0.5;
StrEA[10]:=E*w*t; StrL[10]:=0.5;
StrEA[11]:=E*w*t; StrL[11]:=0.5;
StrEA[12]:=E*w*t; StrL[12]:=0.5;

```

```

PanelDof[1,1]:=16; PanelDof[1,2]:=5; PanelDof[1,3]:=9; PanelDof[1,4]:=10;
PanelDof[2,1]:=18; PanelDof[2,2]:=7; PanelDof[2,3]:=10; PanelDof[2,4]:=11;
PanelDof[3,1]:=27; PanelDof[3,2]:=16; PanelDof[3,3]:=20; PanelDof[3,4]:=21;
PanelDof[4,1]:=29; PanelDof[4,2]:=18; PanelDof[4,3]:=21; PanelDof[4,4]:=22;
G:=E/2;
PanelGt[1]:=G*t; Panela[1]:=0.5; Panelb[1]:=0.5;
PanelGt[2]:=G*t; Panela[2]:=0.5; Panelb[2]:=0.5;
PanelGt[3]:=G*t; Panela[3]:=0.5; Panelb[3]:=0.5;
PanelGt[4]:=G*t; Panela[4]:=0.5; Panelb[4]:=0.5;
// QPanelDof:
// x1,x2,x3,x4,y1,y2,y3,y4
// QPanelGt,QPanelEt:
// Bar3DDof:
// Bar3DEA,Bar3DL,
// Bar3DSinAlpha,
// Bar3DCosAlpha,
// Bar3DSinBeta,
// Bar3DCosBeta:
// Bar2DDof[1,1]:=1; Bar2DDof[1,2]:=4 ; Bar2DDof[1,3]:=3 ; Bar2DDof[1,4]:=2;
// Bar2DEA[1]:=2.1e3;
// Bar2Da[1]:=0; Bar2Db[1]:=2;
ForceDof[1]:=1; ForceDof[2]:=2; ForceDof[3]:=3;
Force[1]:=-0.25; Force[2]:=-0.50; Force[3]:=-0.25;
// Slave,Master1,Master2:
// Factor1,Factor2:
FixedDof[1]:=23; FixedDof[2]:=25; FixedDof[3]:=26;
Disp[1]:=0; Disp[2]:=0; Disp[3]:=0.05;
kernel();
// ShowMessage('1 N1='+FloatToStr(StrN1[1])+ ' N2='+FloatToStr(StrN2[1]));
// ShowMessage('2 N1='+FloatToStr(StrN1[2])+ ' N2='+FloatToStr(StrN2[2]));
// ShowMessage('3 N1='+FloatToStr(StrN1[3])+ ' N2='+FloatToStr(StrN2[3]));
// ShowMessage('4 N1='+FloatToStr(StrN1[4])+ ' N2='+FloatToStr(StrN2[4]));
// ShowMessage('5 N1='+FloatToStr(StrN1[5])+ ' N2='+FloatToStr(StrN2[5]));
// ShowMessage('6 N1='+FloatToStr(StrN1[6])+ ' N2='+FloatToStr(StrN2[6]));
// ShowMessage('7 N1='+FloatToStr(StrN1[7])+ ' N2='+FloatToStr(StrN2[7]));
// ShowMessage('8 N1='+FloatToStr(StrN1[8])+ ' N2='+FloatToStr(StrN2[8]));
// ShowMessage('9 N1='+FloatToStr(StrN1[9])+ ' N2='+FloatToStr(StrN2[9]));
// ShowMessage('10 N1='+FloatToStr(StrN1[10])+ ' N2='+FloatToStr(StrN2[10]));
// ShowMessage('11 N1='+FloatToStr(StrN1[11])+ ' N2='+FloatToStr(StrN2[11]));
// ShowMessage('12 N1='+FloatToStr(StrN1[12])+ ' N2='+FloatToStr(StrN2[12]));
// ShowMessage('1 taut='+FloatToStr(PanelTaut[1]/t));
// ShowMessage('2 taut='+FloatToStr(PanelTaut[2]/t));
// ShowMessage('3 taut='+FloatToStr(PanelTaut[3]/t));
// ShowMessage('4 taut='+FloatToStr(PanelTaut[4]/t));
ShowMessage(FloatToStr(u[2]));
end;
end.
end;
end.

```