

Análise de elementos de membrana em concreto estrutural utilizando o “Softened Truss Model”

Rafael Alves de Souza^{1, †}

Universidade Estadual de Maringá, Departamento de Engenharia Civil, Av. Colombo, 5790, Jardim Universitário, Bloco C67 – Sala 219, CEP 87020-900, Maringá, Paraná, Brasil

RESUMO

Elementos de concreto armado submetidos a esforços de membrana, isto é, forças normais e forças cortantes no próprio plano, são bastante comuns na modelagem de estruturas complexas tais como hangares, usinas nucleares, estruturas off-shore e vigas caixão de grandes pontes. Apesar do problema de dimensionamento desses elementos já estar bem resolvido, o mesmo não pode ser dito para o caso da análise de elementos de membrana já armados. Dentro desse panorama, o presente trabalho tem por objetivo apresentar uma ferramenta computacional desenvolvida na plataforma MATLAB, baseando-se no modelo conhecido como “Softened Truss Model”. De maneira a validar a performance do programa desenvolvido, diversos resultados numéricos foram confrontados com resultados provenientes de ensaios experimentais. Os resultados obtidos revelam que a ferramenta criada possui boa confiabilidade para a análise de elementos de membrana em concreto estrutural armados nas duas direções ortogonais. Finalmente, a implementação ora aqui apresentada, além de ser rápida e eficaz, requer rotinas bem menos complexas do que aquelas normalmente requeridas na implementação da “Modified Compression Field Theory”.

1. INTRODUÇÃO

Os elementos de membrana são elementos que estão submetidos apenas a forças normais e de cortantes no seu próprio plano e podem ser utilizados para a modelagem dos mais diversos tipos de estruturas, conforme ilustra a Figura 1. A maioria das soluções conhecidas para o dimensionamento destes elementos foi obtida através da verificação das condições de equilíbrio e de resistência, conduzindo a um dimensionamento seguro, baseado no Teorema Inferior da Teoria da Plasticidade. Dentro dessa linha, merecem destaque os trabalhos publicados por Gupta (1984, 1986), Nielsen (1984), Fialkow (1991), Ceb-Fip Model Code 1990 (1993), Lourenço & Figueiras (1993, 1995) e Regan (1999).

Apesar do problema de dimensionamento estar bem resolvido, deve-se observar que as alternativas de solução não são suficientemente difundidas no meio prático. Além disso, o problema de verificação de elementos de membrana, isto é, a análise do comportamento de um elemento plano armado de armaduras conhecidas não é um problema trivial como parece

¹ Professor Adjunto

[†] Autor para quem a correspondência deverá ser enviada (rsouza@uem.br)

ser a princípio. Collins et al (1985) relatam que numa competição internacional, com a participação de 43 líderes mundiais em pesquisa sobre simulações numéricas aplicadas ao concreto armado, não foi possível prever o comportamento carga versus deslocamento de painéis retangulares armados com uma margem de erro inferior a 15%.

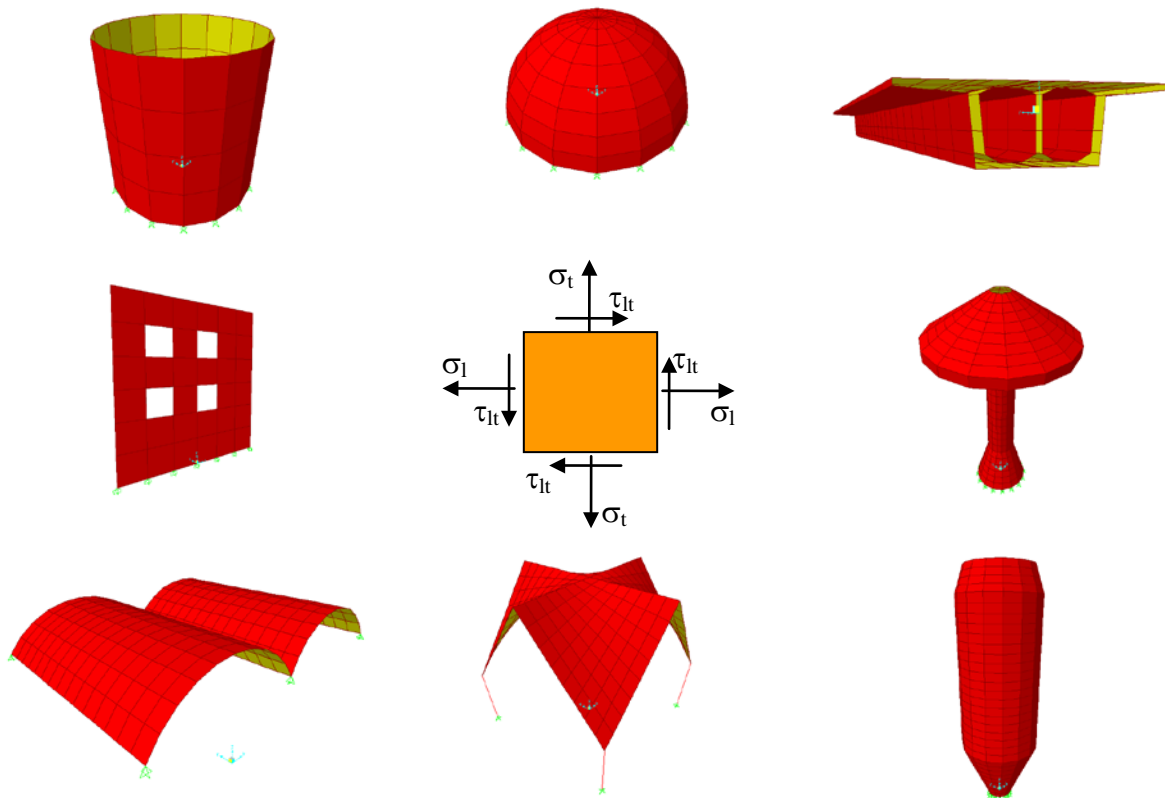


Figura 1 – Estruturas complexas modeladas utilizando elementos de membrana

Ficou evidente que o insucesso das previsões era fortemente dependente das relações tensão-deformação empregadas, as quais basicamente ignoravam a resistência à tração do concreto. Com base nos resultados experimentais da competição realizada, Vecchio & Collins (1986) passaram a considerar a resistência à tração do concreto entre fissuras e desenvolveram uma teoria que ficou conhecida como “Modified Compression Field Theory”, “Teoria do Campo Modificado de Compressões” ou simplesmente MCFT.

De acordo com Vecchio & Collins (1986), a análise de um elemento de membrana é dificultada devido ao fato de que novas fissuras podem ser formadas, fissuras pré-existentes podem se propagar e até mesmo se fechar, e um sistema estrutural constituído por corpos de concreto conectados pelas barras das armaduras tende a se formar sob a ação de determinados carregamentos. Além disso, os corpos de concreto tendem a se unir nas superfícies rugosas existentes na interface das fissuras, podendo assim transmitir cisalhamento e compressão nos pontos em contato.

Um modelo que faz frente ao MCFT é o “Softened Truss Model”, “Modelo de Treliça Flexibilizado” ou simplesmente “STM”. O modelo foi introduzido por Hsu (1993) e trata-se de um método de análise não-linear que envolve a resolução simultânea de um grande número de equações, tal qual se observa no MCFT. Outro modelo que vem ganhando força nos últimos anos é o “Cracked Membrane Model”, proposto por Kaufman & Marti (1998).

Tendo-se em vista a dificuldade do meio prático em obter respostas rápidas e seguras quanto ao comportamento de elementos de membrana em concreto estrutural, o presente trabalho tem por objetivo apresentar uma ferramenta computacional desenvolvida na

plataforma MATLAB. O programa MEDEA RC_STM (Membrane Design and Analysis for Reinforced Concrete Based on the Softened Truss Model) é capaz de otimizar o processo de análise dos elementos de membrana em concreto estrutural e sua formulação está fortemente baseada nos trabalhos desenvolvidos por Hsu (1993).

2. DESCRIÇÃO DO MODELO “SOFTENED TRUSS MODEL”

Conforme mencionado, uma formulação que faz frente ao “Modified Compression Field Theory” (MCFT) é o “Softened Truss Model” (STM), proposto por Hsu (1993). O “Softened Truss Model” é uma avanço em relação ao clássico “Mohr Compatibility Truss Model”, uma vez que há introdução de relações constitutivas não-lineares dos materiais através de observações experimentais realizadas na Universidade de Houston.

De acordo com HSU (1993), a relação tensão versus deformação do concreto deve apresentar duas características fundamentais. A primeira é a relação não-linear entre as tensões e as deformações. A segunda característica, e talvez a mais importante, é o efeito de amolecimento do concreto sob compressão, ocasionado pela fissuração na direção perpendicular à aplicação do carregamento devido a tensões de tração. Dessa maneira, um coeficiente de amolecimento (“softening coefficient”) deve ser incorporado à relação constitutiva do concreto.

2.1. Equações de Equilíbrio, Equações de Compatibilidade e Equações Constitutivas

O “Softened Truss Model” é constituído basicamente por equações de equilíbrio, equações de compatibilidade e equações constitutivas para o concreto e para o aço. As equações de equilíbrio são dadas pelas eq. (01) a (03):

$$\sigma_l = \sigma_d \cos^2 \alpha + \sigma_r \text{sen}^2 \alpha + \rho_l f_l \quad (01)$$

$$\sigma_t = \sigma_d \text{sen}^2 \alpha + \sigma_r \cos^2 \alpha + \rho_t f_t \quad (02)$$

$$\tau_{lt} = (-\sigma_d + \sigma_r) \cdot \text{sen} \alpha \cdot \cos \alpha \quad (03)$$

As equações de compatibilidade, por sua vez, são dadas pelas eq. (04) a (06):

$$\varepsilon_l = \varepsilon_d \cos^2 \alpha + \varepsilon_r \text{sen}^2 \alpha \quad (04)$$

$$\varepsilon_t = \varepsilon_d \text{sen}^2 \alpha + \varepsilon_r \cos^2 \alpha \quad (05)$$

$$\gamma_{lt} = 2 \cdot (-\varepsilon_d + \varepsilon_r) \cdot \text{sen} \alpha \cdot \cos \alpha \quad (06)$$

Para o concreto em compressão, são utilizadas equações constitutivas afetadas pelo coeficiente de amolecimento (ζ), bem como pela deformação de pico do concreto na compressão (ε_o), conforme ilustra a Figura 2 e as eq. (07) a (10):

$$\sigma_d = \zeta \cdot f_{ck} \cdot \left[2 - \left(\frac{\varepsilon_d}{\zeta \varepsilon_o} \right) - \left(\frac{\varepsilon_d}{\zeta \varepsilon_o} \right)^2 \right] \text{ para } \left(\frac{\varepsilon_d}{\zeta \varepsilon_o} \right) \leq 1 \quad (07)$$

$$\sigma_d = \zeta \cdot f_{ck} \cdot \left[1 - \left(\frac{\varepsilon_d / \zeta \varepsilon_o - 1}{2 / \zeta - 1} \right)^2 \right] \text{ para } \left(\frac{\varepsilon_d}{\zeta \varepsilon_o} \right) > 1 \quad (08)$$

$$\zeta = \frac{0,9}{\sqrt{1 + 400 \cdot \varepsilon_r}} \quad (09)$$

$$\varepsilon_o = 0,002 \quad (10)$$

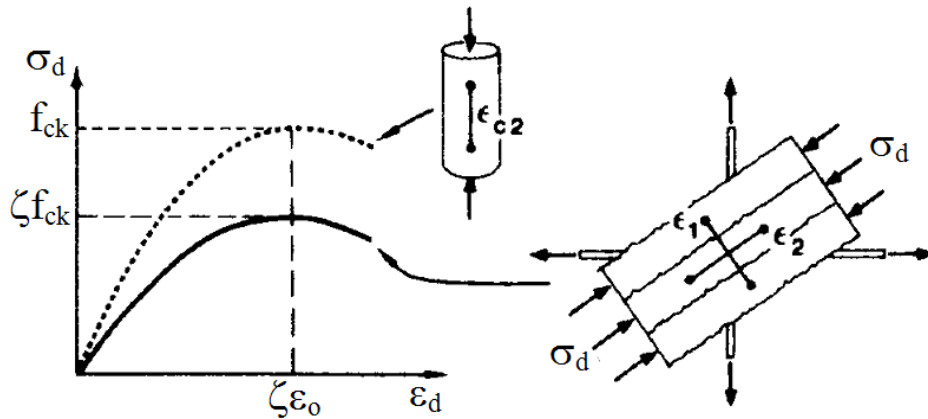


Figura 2 – Comportamento do concreto à compressão no “Softened Truss Model”

Para o concreto sujeito à tração, adota-se o comportamento ilustrado na Figura 3 e assume-se que a deformação equivalente à fissuração (ε_r) seja igual a 0,00008. O comportamento do concreto à tração é dado pelas eq. (11) a (14):

$$\sigma_r = E_c \cdot \varepsilon_s \text{ para } \varepsilon_r \leq 0,00008 \quad (11)$$

$$\sigma_r = f_{cr} \cdot \left(\frac{0,00008}{\varepsilon_r} \right)^{0,4} \text{ para } \varepsilon_r > 0,00008 \quad (12)$$

$$f_{cr} = 0,31 \cdot \sqrt{f_{ck}} \text{ (MPa)} \quad (13)$$

$$E_c = 3875 \cdot \sqrt{f_{ck}} \text{ (MPa)} \quad (14)$$

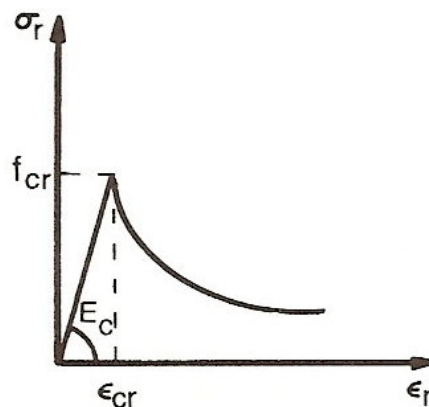


Figura 3 – Comportamento do concreto à tração no “Softened Truss Model”

Para as armaduras, admite-se um modelo bilinear simplificado ilustrado na Figura 4 e representado pelas eq. (15) a (18):

$$f_l = E_s \cdot \varepsilon_l \text{ para } \varepsilon_l \leq \varepsilon_{ly} \quad (15)$$

$$f_l = f_{ly} \text{ para } \varepsilon_l > \varepsilon_{ly} \quad (16)$$

$$f_t = E_s \cdot \varepsilon_t \text{ para } \varepsilon_t \leq \varepsilon_{ty} \quad (17)$$

$$f_t = f_{ty} \text{ para } \varepsilon_t > \varepsilon_{ty} \quad (18)$$

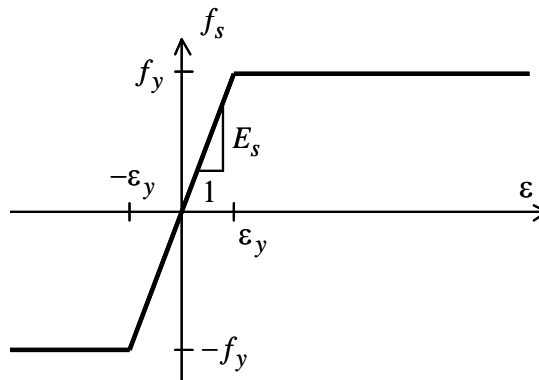


Figura 4 – Comportamento bilinear do aço no modelo “Softened Truss Model”

Na realidade, Hsu (1993) recomenda para o aço um comportamento mais complexo onde é definida uma espécie de escoamento aparente propiciado pela interação com o concreto. Na realidade, o comportamento das armaduras quando circundadas por concreto tende a ser um pouco mais rígida. No entanto, de maneira a facilitar a implementação do modelo, será considerado no presente trabalho o comportamento simples e isolado das barras de aço, tendo-se em vista que os erros cometidos são pequenos.

Ainda de acordo com Hsu (1993), se uma estrutura está sujeita a cargas estáticas e a deformação da estrutura não é relevante, então pode-se assumir com segurança o comportamento bilinear simples das barras de aço e que $\sigma_r = 0$. Basicamente, do ponto de vista de resistência, o erro cometido com a hipótese não-conservadora de comportamento simples das barras de aço cancela o erro assumido com a hipótese conservadora de que o concreto não possa absorver tensões de tração. Nesse caso, as deformações tenderão a ser superestimadas, uma vez que o efeito de enrijecimento das barras devido ao concreto está sendo negligenciado.

Por outro lado, o uso simultâneo do comportamento bilinear do aço (eq. 15 a 18) com o comportamento do concreto à tração (eq. 11 a 14) introduz um erro conceitual. Esse tratamento conduz a um falso enrijecimento do concreto, reduzindo corretamente as deformações mas levando a um acréscimo de resistência que não pode ser garantido. Dessa maneira, caso não sejam implementadas as curvas de comportamento do aço enrijecidas pela aderência ao concreto, recomenda-se que seja utilizado $\sigma_r = 0$. No presente trabalho serão apresentadas soluções utilizando $\sigma_r = 0$ e $\sigma_r \neq 0$, de maneira a visualizar de maneira clara a diferença entre as duas hipóteses.

2.2. Solução para o Caso de Aumento Proporcional de Carregamento

O estado de tensão descrito pela tensões σ_1 , σ_t e τ_{lt} , conforme ilustra a Figura 5, também pode ser expresso em termos de três variáveis principais de tensão, nomeadamente σ_1 , S e α_2 .

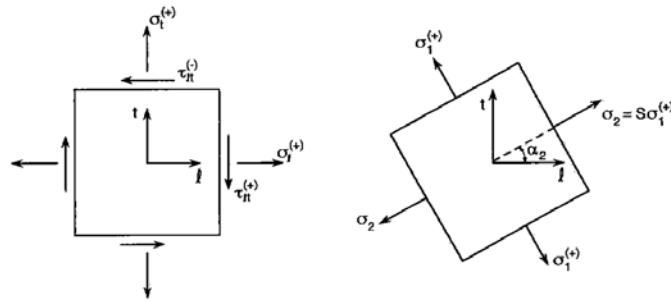


Figura 5 – Relação entre as tensões aplicadas e as tensões principais

As variáveis principais são definidas conforme a seguir:

σ_1 = Maior tensão principal, sempre positiva e em tração;

$S = \sigma_2 / \sigma_1$ = Razão entre a menor tensão principal (compressão) e a maior tensão principal (tração), sendo positiva quando σ_2 está em tração e negativa quando σ_2 está em compressão;

α_2 = Ângulo entre a menor tensão principal (compressão) e o eixo longitudinal.

De acordo com Hsu (1993), quando um elemento está sujeito a um aumento de carregamento proporcional entre as tensões σ_1 , σ_t e τ_{lt} , a tensão principal σ_1 sofre um aumento, enquanto as variáveis S e α_2 permanecem constantes. Dessa maneira, as tensões externas aplicadas σ_1 , σ_t e τ_{lt} podem ser definidas em função da tensão principal σ_1 , conforme a seguir:

$$\sigma_l = m_l \cdot \sigma_1 \quad (19)$$

$$\sigma_t = m_t \cdot \sigma_1 \quad (20)$$

$$\tau_{lt} = m_{lt} \cdot \sigma_1 \quad (21)$$

Nas equações anteriores, os coeficientes m_l , m_t e m_{lt} permanecem constantes enquanto a tensão principal σ_1 aumenta perante carregamentos proporcionais. Conforme pode-se observar pelas eq. (19) a (21), os coeficientes m_l , m_t e m_{lt} são simplesmente as tensões externas aplicadas normalizadas pela tensão principal σ_1 . As relações entre os coeficientes anteriores e as variáveis S e α_2 são dadas por:

$$m_l = S \cdot \cos^2 \alpha_2 + \text{sen}^2 \alpha_2 \quad (22)$$

$$m_t = S \cdot \text{sen}^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_2 \quad (23)$$

$$m_{lt} = (-S + 1) \cdot \text{sen} \alpha_2 \cdot \cos \alpha_2 \quad (24)$$

Conforme pode se observar pelas eq. (22) a (23), se as variáveis S e α_2 são fornecidas os coeficientes m_l , m_t e m_{lt} podem ser imediatamente obtidos. Assim, aplicando as eq. (22) a (24) nas eq. (01) a (03), novas equações de equilíbrio em função dos coeficientes m_l , m_t e m_{lt} e da tensão principal σ_1 podem ser obtidas:

$$m_l \sigma_1 = \sigma_d \cos^2 \alpha + \sigma_r \text{sen}^2 \alpha + \rho_l f_l \quad (25)$$

$$m_t \sigma_1 = \sigma_d \text{sen}^2 \alpha + \sigma_r \cos^2 \alpha + \rho_t f_t \quad (26)$$

$$m_{lt} \sigma_1 = (-\sigma_d + \sigma_r) \cdot \text{sen} \alpha \cdot \cos \alpha \quad (27)$$

De acordo com Hsu (1993), o comportamento de um elemento de membrana perante carregamento proporcional pode ser descrito apenas pela tensão principal σ_1 . Para se isolar σ_1 basta eliminar o ângulo α das eq. (25) a (27). Utilizando a relação $\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$ e rearranjando os termos das equações anteriores, tem-se:

$$-m_l \sigma_1 + \sigma_r + \rho_l f_l = (-\sigma_d + \sigma_r) \cdot \text{cos}^2 \alpha \quad (28)$$

$$-m_l \sigma_1 + \sigma_r + \rho_l f_l = (-\sigma_d + \sigma_r) \cdot \text{sen}^2 \alpha \quad (29)$$

$$m_u \sigma_1 = (-\sigma_d + \sigma_r) \cdot \text{sen} \alpha \cdot \text{cos} \alpha \quad (30)$$

Multiplicando-se a eq. (28) pela eq. (29) obtém-se:

$$(-m_l \sigma_1 + \sigma_r + \rho_l f_l) \cdot (-m_l \sigma_1 + \sigma_r + \rho_l f_l) = (-\sigma_d + \sigma_r)^2 \cdot \text{sen}^2 \alpha \cdot \text{cos}^2 \alpha \quad (31)$$

Por outro lado, elevando-se a eq. (30) ao quadrado obtém-se:

$$(m_u \sigma_1)^2 = (-\sigma_d + \sigma_r)^2 \cdot \text{sen}^2 \alpha \cdot \text{cos}^2 \alpha \quad (32)$$

O ângulo α pode ser finalmente eliminado igualando-se os membros do lado esquerdo das eq. (31) e (32):

$$(-m_l \sigma_1 + \sigma_r + \rho_l f_l) \cdot (-m_l \sigma_1 + \sigma_r + \rho_l f_l) = (m_u \sigma_1)^2 \quad (33)$$

Fazendo-se as multiplicações necessárias na eq. (33) e reagrupando os termos de maneira adequada, pode ser obtida uma equação quadrática para σ_1 , conforme a seguir:

$$(m_l \cdot m_t - m_u^2) \cdot \sigma_1^2 - [m_l \cdot (\sigma_r + \rho_l f_l) + m_t \cdot (\sigma_r + \rho_l f_l)] \cdot \sigma_1 + (\sigma_r + \rho_l f_l) \cdot (\sigma_r + \rho_l f_l) = 0 \quad (34)$$

Conforme pode-se observar, a eq. (34) é um tanto quanto extensa. De maneira a simplificar tal equação, pode-se assumir as seguintes expressões auxiliares:

$$A = (m_l \cdot m_t - m_u^2) \quad (35)$$

$$B = [m_l \cdot (\sigma_r + \rho_l f_l) + m_t \cdot (\sigma_r + \rho_l f_l)] \quad (36)$$

$$C = (\sigma_r + \rho_l f_l) \cdot (\sigma_r + \rho_l f_l) \quad (37)$$

Onde a obtenção de σ_1 pode ser finalmente calculada por:

$$\sigma_1 = \frac{1}{2A} (B \pm \sqrt{B^2 - 4 \cdot A \cdot C}) \quad (38)$$

2.3 Relações Complementares de Compatibilidade

De maneira a facilitar o procedimento iterativo que será apresentado adiante, convém definir a deformação ε_l em função da tensão f_l , bem como a deformação ε_t em função da

tensão f_t . A deformação longitudinal ε_l pode ser expressa em função da tensão f_l eliminando-se o ângulo α da eq. (25) e (28). Da eq. (25) pode-se obter:

$$\cos^2 \alpha = \frac{-\sigma_l + \sigma_r + \rho_l f_l}{\sigma_r - \sigma_d} \quad (39)$$

Inserindo $\varepsilon_r \cdot \cos^2 \alpha = \varepsilon_l - \varepsilon_r \cdot \cos^2 \alpha$ na eq. (28), tem-se:

$$\cos^2 \alpha = \frac{\varepsilon_l - \varepsilon_r}{\varepsilon_r - \varepsilon_d} \quad (40)$$

Igualando-se a eq. (39) e a eq.(40), obtém-se:

$$\varepsilon_l = \varepsilon_r + \frac{\varepsilon_r - \varepsilon_d}{\sigma_r - \sigma_d} (\sigma_l + \sigma_r - \rho_l f_l) \quad (41)$$

Relembrando que para carregamentos proporcionais σ_l pode ser descrito em função de m_l e σ_1 , conforme a eq. (19), pode-se obter a seguinte expressão:

$$\varepsilon_l = \varepsilon_r + \frac{\varepsilon_r - \varepsilon_d}{\sigma_r - \sigma_d} (m_l \sigma_1 + \sigma_r - \rho_l f_l) \quad (42)$$

Da mesma maneira, a deformação transversal ε_t pode ser expressa em função da tensão f_t eliminando-se o ângulo α das eq. (23) e (26). Da eq. (23) pode-se obter:

$$\sin^2 \alpha = \frac{-\sigma_t + \sigma_r + \rho_t f_t}{\sigma_r - \sigma_d} \quad (43)$$

Inserindo $\varepsilon_r \cdot \sin^2 \alpha = \varepsilon_t - \varepsilon_r \cdot \sin^2 \alpha$ na eq. (26), tem-se:

$$\sin^2 \alpha = \frac{-\varepsilon_t + \varepsilon_r}{\varepsilon_r - \varepsilon_d} \quad (44)$$

Igualando-se a eq. (43) e a eq. (44), obtém-se:

$$\varepsilon_t = \varepsilon_r + \frac{\varepsilon_r - \varepsilon_d}{\sigma_r - \sigma_d} (\sigma_t - \sigma_r - \rho_t f_t) \quad (45)$$

Novamente, relembrando que para carregamentos proporcionais σ_t pode ser descrito em função de m_t e σ_1 , conforme a eq. (20), pode-se obter a seguinte expressão:

$$\varepsilon_t = \varepsilon_r + \frac{\varepsilon_r - \varepsilon_d}{\sigma_r - \sigma_d} (m_t \sigma_1 - \sigma_r - \rho_t f_t) \quad (46)$$

Somando-se a eq. (04) e a eq. (05) pode-se ainda obter a deformação ε_r , conforme a seguir:

$$\varepsilon_r = \varepsilon_l + \varepsilon_t - \varepsilon_d \quad (47)$$

Finalmente, o ângulo α pode ainda ser obtido a partir da eq. (04) e da eq. (05) e possuirá o seguinte valor:

$$\tan^2 \alpha = \frac{\varepsilon_l - \varepsilon_d}{\varepsilon_t - \varepsilon_d} \quad (48)$$

2.4 Procedimento Iterativo

As equações apresentadas anteriormente e que governam o comportamento de elementos de membrana apresentam 14 incógnitas, sendo 7 incógnitas relacionadas à tensão ($\sigma_l, \sigma_t, \tau_{lt}, \sigma_d, \sigma_r, f_l, f_t$), 5 incógnitas relacionadas à deformação ($\varepsilon_l, \varepsilon_t, \gamma_{lt}, \varepsilon_d, \varepsilon_r$) e 2 incógnitas restantes relacionadas ao ângulo α e ao coeficiente ζ .

Nos casos em que há aumento proporcional das tensões externas aplicadas (σ_l, σ_t e τ_{lt}) costuma-se selecionar a variável ε_d . Uma vez que essa variável varia monotonicamente desde zero até um valor máximo é possível traçar o comportamento completo da estrutura através do fluxograma apresentado na Figura 6, recomendado por Hsu (1993).

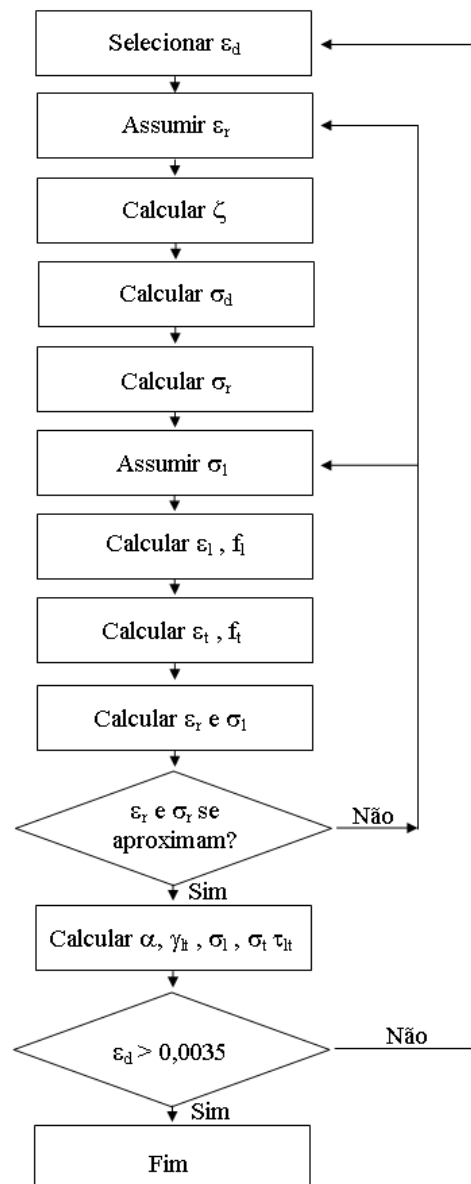


Figura 6 – Procedimento iterativo para análise de elementos de membrana utilizando o “Softened Truss Model” proposto por Hsu (1993)

3. DESCRIÇÃO DO PROGRAMA MEDEA RC_STM

De maneira a analisar elementos de membrana em concreto estrutural através do modelo “Softened Truss Model”, proposto por Hsu (1993), foi implementado no programa MATLAB o fluxograma apresentado na Figura 6. Ao programa criado, deu-se o nome de MEDEA RC_STM (“Membrane Design and Analysis of Reinforced Concrete Elements Using the Softened Truss Model”).

A Figura 7 (a) ilustra a tela de entrada do programa MEDEA RC_STM, enquanto a Figura 7 (b) ilustra o banco de dados criado para o programa. Dentre as principais potencialidades do programa estão as funções de salvar e abrir arquivos de entrada e saída de dados, possibilitando assim que seja constituída uma biblioteca de elementos de membrana disponibilizados na literatura.

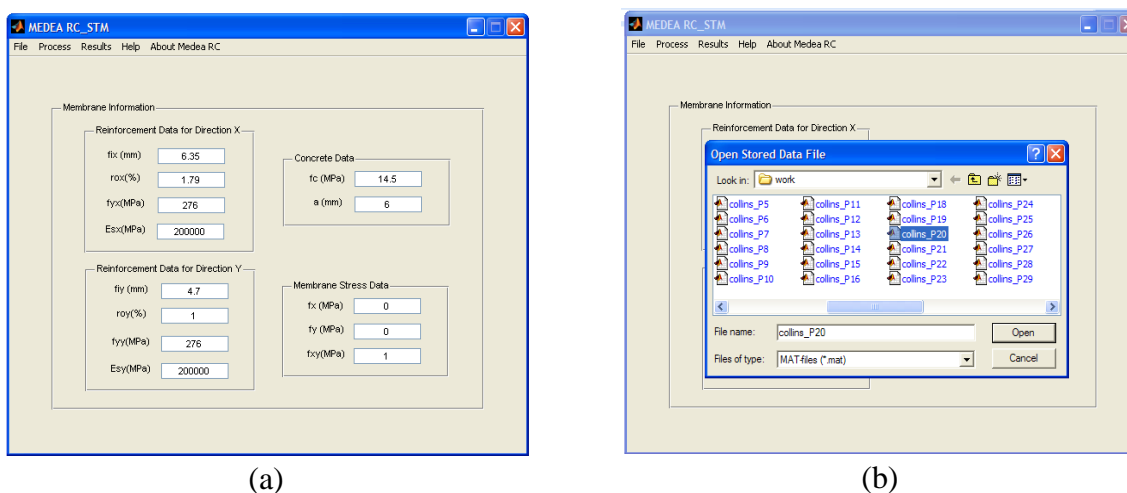


Figura 7 – (a) Interface para entrada de dados do programa MEDEA RC_STM e (b) biblioteca de dados experimentais de elementos de membrana

Além do registro dos dados de entrada e saída, o programa possui funções gráficas, permitindo que sejam gerados os diagramas de comportamento das armaduras para o aumento das tensões e das deformações. Através dos referidos gráficos pode-se avaliar se a quantidade de armadura fornecida é adequada para o estado de solicitação imposto para o elemento de membrana em concreto estrutural.

De maneira geral, o programa descreve de maneira completa o comportamento de um elemento de membrana em concreto estrutural, calculando as tensões no materiais (aço e concreto) para diversos passos de carga e ilustrando de maneira gráfica os resultados mais importantes.

A Figura 8 ilustra a performance do programa para o Painel PV20 ensaído por Collins et alli (1985). Como pode-se observar, o programa é capaz de identificar de maneira automática a máxima tensão de cisalhamento possível de ser suportada pelo elemento em análise, bem como, as tensões capazes de provocar o escoamento das armaduras.

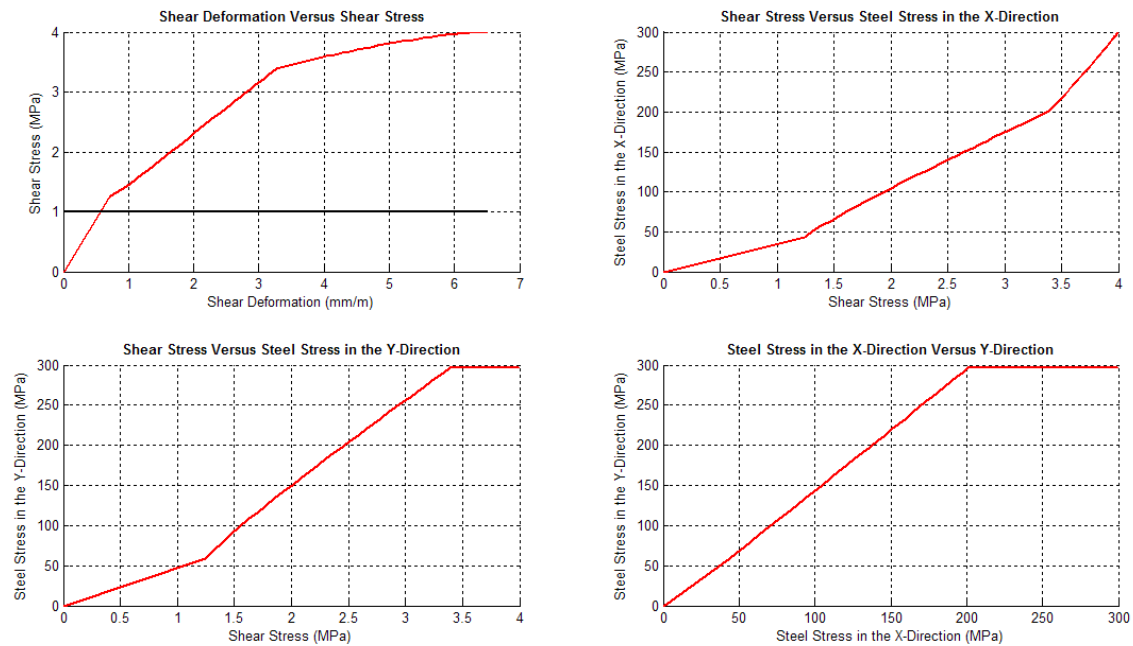


Figura 8 – Performance do programa MEDEA RC_STM para o painel PV20 ensaiado por Collins et alli (1985)

De maneira geral, a implementação numérica do “Softened Truss Model (STM)” produz resultados semelhantes àqueles obtidos com a implementação do “Modified Compression Field Theory (MCFT)”. No entanto, deve-se observar que o processo de implementação do modelo baseado no STM é muito mais simples do que no caso do MCFT.

Do ponto de vista de engenharia, os erros cometidos entre uma análise e outra são bastante satisfatórios, conforme ilustra a Figura 9, que apresenta as respostas de comportamento para o painel PV20 ensaiado por Collins et alli (1985). Em cor azul encontra-se a resposta utilizando o “Modified Compression Field”, em cor verde o comportamento capturado pelo “Softened Truss Model” sem considerar a colaboração à tração do concreto e em cor vermelha o “Softened Truss Model” assumindo que a resistência à tração do concreto colabora na resistência final da peça.

Deve-se observar que para a reprodução da Figura 9, foi criado um programa adicional, denominado MEDEA RC_STM, cuja formulação é baseada na “Modified Compression Field Theory” proposta por Vecchio & Collins (1986). Conforme pode-se observar, o modelo com a implementação do “Modified Compression Field” captura melhor a transição da transferência das tensões de tração do concreto para o aço. O “Softened Truss Model” consegue capturar os mesmos níveis finais de resistência, sem no entanto necessitar de uma implementação numérica muito aprofundada.

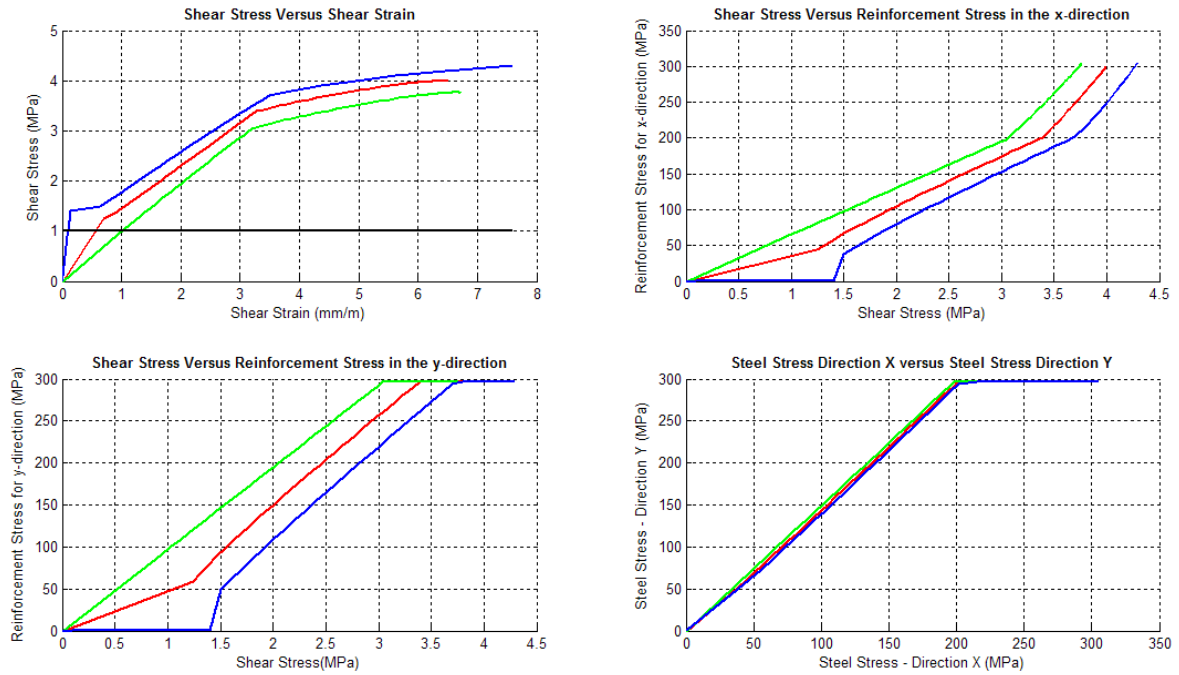


Figura 9 – Comparação de desempenho entre os modelos “STM” e “MCFT”

A Figura 10 apresenta os resultados obtidos numericamente em relação aos resultados experimentais do Painel PV20 ensaiado por Collins et alli (1985). Conforme pode-se observar, os programas desenvolvidos reproduzem desempenhos que conseguem chegar muito próximos dos valores experimentais, a despeito da grande complexidade de se reproduzir o comportamento de elementos de membrana em concreto estrutural.

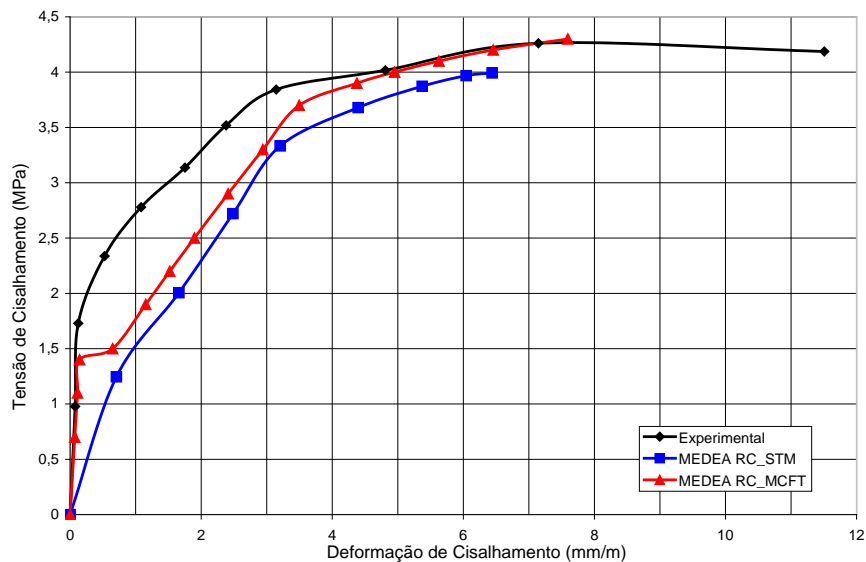


Figura 10 – Comparação entre os resultados numéricos utilizando os programas MEDEA RC e os resultados experimentais de Collins et alli (1985)

Deve-se observar que o programa MEDEA RC_STM é uma alternativa às soluções fornecidas pelos programas MEMBRANE e WWW. O programa MEMBRANE foi desenvolvido por Bentz (2000) e sem dúvida alguma é um programa bem mais complexo que o programa MEDEA RC_STM. Por outro lado, o programa MEDEA RC_STM apresenta

performance e complexidade semelhantes ao programa WWW, desenvolvido por Hoogenboom & Voskamp (2004) e voltado para a utilização on-line via Internet.

De maneira a comprovar a performance do programa MEDEA RC_STM, a Tabela 1 apresenta um resumo comparativo entre os resultados experimentais de um grande banco de dados disponível na literatura e os resultados numéricos obtidos utilizando o programa MEDEA RC_STM. Conforme pode-se observar, foram utilizados os resultados experimentais obtidos por Collins et alli (1985), Bhide & Collins (1989), Vecchio et alli (1994) e Pang & Hsu (1995), com resistência à compressão do concreto variando entre 11,60 a 72,20 MPa. Foram investigados 58 resultados para fissuração e 70 resultados para ruptura de placas em concreto armado submetidas a combinações de força normal e força cortante.

Tabela 1 – Resumo dos resultados numéricos comparados aos resultados experimentais de Collins et alli (1985), Bhide & Collins (1989), Vecchio et alli (1994) e Pang & Hsu (1995)

Ensaio	f_{ck} (MPa)	Fissuração Experimental / Fissuração Numérica			Ruptura Experimental / Ruptura Numérica		
		Média	Desvio Padrão (MPa)	Coefficiente de Variação	Média	Desvio Padrão (MPa)	Coefficiente de Variação
COLLINS et alli (1985)	11,60 a 34,50	1,41	0,287	0,203	1,10	0,240	0,218
BHIDE & COLLINS (1989)	16,40 a 43,40	1,29	0,458	0,356	2,07	0,357	0,173
VECCHIO et alli (1994)	43,00 a 72,20	0,83	0,308	0,371	1,18	0,311	0,264
PANG & HSU (1995)	41,20 a 45,20	-	-	-	0,93	0,073	0,079
Todos os ensaios anteriores	11,60 a 72,20	1,58	0,827	0,522	1,38	0,240	0,174

Conforme pode-se observar, no que se refere a fissuração o quociente entre os resultados experimentais e aqueles verificados numericamente foi de 1,58, com um desvio padrão de 0,827 e um coeficiente de variação de 52,20%. Já para a ruptura, obteve-se um quociente entre a carga de ruína experimental e a carga de ruptura numérica igual a 1,38, com um desvio padrão de 0,24 e coeficiente de variação de 17,40%. A Tabela 2, procura apresentar de maneira detalhada os resultados obtidos.

Conforme pode-se observar pela Tabela 1, a fissuração foi melhor capturada para o ensaio de Collins et alli (1985), que possui resistência à compressão do concreto variando entre 11,60 a 34,50 MPa. Para este caso, o quociente entre a carga de fissuração experimental e a carga de fissuração teórica foi em média igual a 1,41, com um coeficiente de variação de 20,3%, o menor entre todos os coeficientes. Esse fato revela que a previsão de fissuração deve ser melhor formulada no STM, tendo-se em vista que a relação entre a carga de fissuração experimental foi em média 41% superior àquela reproduzida numericamente.

Por outro lado, a carga de ruptura foi melhor capturada para os ensaios de Pang & Hsu (1995), com coeficiente de variação de 7,9%. Observa-se nesse caso um quociente médio entre a carga de ruptura experimental e a carga de ruptura numérica igual a 0,93. Observa-se que o coeficiente de variação obtido na ruptura para os ensaios de Vecchio et alli (1994) são os maiores entre todos os outros testados. No entanto, esse valor chega a um valor máximo de 26,4% e ainda pode ser considerado adequado.

Tabela 2 – Resultados numéricos comparados aos resultados experimentais de Collins et alli (1985), Bhide & Collins (1989), Vecchio et alli (1994) e Pang & Hsu (1995)

Collins et alli (1985)						
Painel (A)	$\tau_{\text{fissuração,experimental}}$ (MPa) (B)	$\tau_{\text{fissuração,numérica}}$ (MPa) (C)	(B)/(C)	$\tau_{\text{ruína,experimental}}$ (MPa) (D)	$\tau_{\text{ruína,numérica}}$ (MPa) (E)	(D)/(E)
PV1	2,21	2,02	1,09	>8,02	7,81	1,03
PV2	1,10	0,82	1,34	1,16	0,82	1,41
PV3	1,66	1,48	1,12	3,07	3,33	0,92
PV4	1,79	1,57	1,14	2,89	2,69	1,07
PV5	1,73	1,61	1,07	> 4,24	4,80	0,88
PV6	2,00	1,79	1,12	4,55	4,97	0,92
PV7	1,93	1,85	1,04	> 6,81	7,25	0,94
PV8	1,73	1,85	0,94	> 6,67	7,61	0,88
PV9	1,38	0,91	1,52	> 3,74	3,31	1,13
PV10	1,86	1,01	1,84	3,97	3,56	1,12
PV11	1,66	1,08	1,54	3,56	3,83	0,93
PV12	1,73	1,02	1,70	3,13	3,32	0,94
PV13	1,73	Erro	Erro	2,01	Erro	Erro
PV14	1,93	1,34	1,44	> 5,24	5,24	1,00
PV16	2,07	1,29	1,60	4,12	2,00	2,06
PV18	2,00	1,15	1,74	> 3,04	2,86	1,06
PV19	2,07	1,20	1,73	3,95	3,56	1,11
PV20	2,21	1,95	1,13	4,26	3,99	1,07
PV21	2,35	1,27	1,85	5,03	4,70	1,07
PV22	2,42	1,29	1,88	6,07	4,99	1,22
PV23	3,73	Erro	Erro	8,87	Erro	Erro
PV24	4,97	Erro	Erro	> 7,94	Erro	Erro
PV25	4,14	Erro	Erro	9,12	Erro	Erro
PV26	2,00	1,34	1,49	5,41	5,07	1,07
PV27	2,04	1,34	1,52	6,35	5,26	1,21
PV28	1,66	1,21	1,37	5,80	4,68	1,24
PV29	2,21	1,61	1,37	5,87	5,41	1,09
PV30	1,55	1,23	1,26	> 5,13	4,66	1,10
Bhide & Collins (1989)						
PB11	1,19	0,67	1,78	1,27	0,60	2,12
PB12	1,32	0,65	2,03	1,53	0,57	2,68
PB4	0,81	0,53	1,53	1,16	0,49	2,37
PB6	0,85	0,55	1,55	1,15	0,50	2,30
PB7	0,74	0,54	1,37	0,86	0,51	1,69
PB8	0,52	0,51	1,02	0,79	0,49	1,61
PB10	0,31	0,47	0,66	0,56	0,41	1,37
PB15	1,80	0,90	2,00	1,96	0,80	2,45
PB16	0,98	0,82	1,20	1,45	0,77	1,88
PB14	0,78	0,78	1,00	1,54	0,75	2,05
PB17	0,54	0,72	0,75	1,22	0,70	1,74
PB18	1,62	0,82	1,98	1,70	0,69	2,46
PB19	1,23	0,69	1,78	1,28	0,61	2,10
PB20	0,94	0,67	1,40	1,42	0,61	2,33
PB28	0,84	0,68	1,24	1,53	0,62	2,47
PB21	0,73	0,63	1,16	1,42	0,60	2,37
PB22	0,44	0,52	0,85	1,03	0,51	2,02
PB29	0,75	0,84	0,89	1,49	0,79	1,89
PB30	0,74	0,79	0,94	1,48	0,76	1,95
PB31	0,44	0,74	0,59	1,15	0,73	1,58
Vecchio et alli (1994)						
PHS1	2,54	1,42	1,79	2,95	1,39	2,12
PHS2	1,94	3,16	0,61	6,66	5,89	1,13
PHS3	2,28	3,04	0,75	8,19	8,12	1,01
PHS4	2,39	3,41	0,70	6,91	6,63	1,04
PHS5	1,62	2,45	0,66	4,81	3,97	1,21
PHS6	2,25	2,66	0,85	9,89	7,68	1,29
PHS7	2,25	2,96	0,76	10,26	10,19	1,01
PHS8	2,15	3,02	0,71	10,84	9,79	1,11
PHS9	2,22	2,94	0,76	9,37	8,12	1,15
PHS10	2,13	2,75	0,77	8,58	7,88	1,09
PA1	2,19	2,67	0,82	6,34	6,29	1,01
PA2	1,88	2,35	0,80	6,22	6,31	0,99
Pang & Hsu (1995)						
A1	-	2,25	-	2,27	2,76	0,82
A2	-	2,29	-	5,37	5,72	0,94
A3	-	2,37	-	7,65	8,26	0,93
A4	-	2,50	-	11,31	10,40	1,09
B1	-	2,41	-	3,96	3,98	0,99
B2	-	2,45	-	6,13	6,87	0,89
B3	-	2,39	-	4,35	4,81	0,90
B4	-	2,36	-	5,06	5,78	0,88
B5	-	2,41	-	7,15	8,16	0,88
B6	-	2,47	-	9,14	9,72	0,94

Fazendo-se uma análise cuidadosa dos resultados, percebe-se que o modelo “Softened Truss Model” não teve um desempenho adequado para os painéis ensaiados por Bhide & Collins (1989). Do ponto de vista experimental, os painéis ensaiados pelos referidos pesquisadores é diferente dos painéis utilizados nos outros ensaios. Nos painéis de Bhide &

Collins (1989) não há armadura nas duas direções, isto é, a armadura vertical não foi considerada. Eliminado-se esses resultados e reconhecendo que o modelo tem limitações para estes casos, pode-se obter uma nova leitura para os resultados numéricos, conforme ilustra a Tabela 3.

Tabela 3 – Resumo dos resultados numéricos comparados aos resultados experimentais de Collins et alli (1985), Vecchio et alli (1994) e Pang & Hsu (1995)

Ensaio	f_{ck} (MPa)	Fissuração Experimental / Fissuração Numérica			Ruptura Experimental / Ruptura Numérica		
		Média	Desvio Padrão (MPa)	Coefficiente de Variação	Média	Desvio Padrão (MPa)	Coefficiente de Variação
COLLINS et alli (1985)	11,60 a 34,50	1,41	0,287	0,203	1,10	0,240	0,218
VECCHIO et alli (1994)	43,00 a 72,20	0,83	0,308	0,371	1,18	0,311	0,264
PANG & HSU (1995)	41,20 a 45,20	-	-	-	0,93	0,073	0,079
Todos os ensaios anteriores	11,60 a 72,20	1,22	0,401	0,329	1,08	0,250	0,230

Conforme pode-se observar, eliminado-se os resultados de Bhide & Collins (1989), o erro para a carga de fissuração diminui de 58% para 22%. Para o caso da carga de ruína o erro cai de 38% para 8%, demonstrando que o modelo tem bom desempenho para painéis armados nas duas direções. Na realidade, por questões normativas, os painéis sempre serão armados nas duas direções ortogonais, pelo menos com uma armadura mínima. Dessa maneira, pode-se supor que os ensaios de Bhide & Collins (1989) não representam uma situação usual na prática. Na realidade, deve-se observar que as previsões baseadas no “Modified Compression Field” conseguiram capturar inclusive a possibilidade de ausência de armadura em uma das direções. No caso do “Softned Truss Model” essa limitação é visível através dos resultados apresentados.

Tabela 4 – Resumo dos resultados numéricos comparados aos resultados experimentais para diferentes faixas de variação da resistência à compressão do concreto

f_{ck} (MPa)	Número de Painéis	Fissuração Experimental / Fissuração Numérica			Ruptura Experimental / Ruptura Numérica		
		Média	Desvio Padrão	Coefficiente de Variação	Média	Desvio Padrão	Coefficiente de Variação
11,60 a 20,00	11	1,60	0,252	0,158	1,09	0,095	0,087
20,00 a 40,00	13	1,25	0,216	0,173	1,11	0,321	0,288
40,00 a 50,00	13	0,82	0,023	0,028	0,96	0,119	0,124
50,00 a 72,20	9	0,84	0,361	0,433	1,21	0,349	0,289

De maneira a se investigar o efeito da resistência à compressão do concreto nos resultados numéricos, procurou-se estudar os coeficientes de variação em função das faixas de resistência para painéis armados nas duas direções. A Tabela 4 mostra que a fissuração dos painéis é melhor capturada pelo programa MEDEA RC_STM na faixa de resistência à compressão do concreto variando entre 40,00 e 50,00 MPa. Para essa faixa de resistência obtém-se um coeficiente médio entre a carga de fissuração experimental e a teórica igual a 0,82, com um coeficiente de variação de apenas 2,3%. Por outro, observa-se que as respostas numéricas não serão satisfatórias, do ponto de vista de fissuração, para resistências superiores a 50 MPa, uma vez que o coeficiente de variação é igual a 43,3%.

No que se refere a previsão numérica da ruína dos painéis ensaiados experimentalmente, a Tabela 4 revela que as melhores previsões serão para concretos com resistências entre 11,60 e 20 MPa, cujos coeficiente de variação será igual a 8,7% para um quociente entre a carga experimental e a carga numérica de 1,10. Observa-se que as piores previsões de ruína concentram-se na faixa entre 50 e 72 MPa, onde o coeficiente de variação chega a 28,9% para um quociente entre a carga experimental e a carga numérica de 1,21.

4. CONCLUSÕES

A análise de elementos de membrana em concreto estrutural não é uma tarefa trivial como parece ser a princípio. Apesar do problema de dimensionamento já estar bem equacionado o mesmo não pode se dizer o mesmo do processo de análise. A obtenção das respostas de carregamento e deformação de um elemento de membrana cujas armaduras são conhecidas é um processo moroso e complicado.

Essa dificuldade é provocada pelo comportamento complexo do concreto, tanto à tração quanto à compressão. Tal comportamento é caracterizado por equações constitutivas não-lineares, resultado do processo de fissuração do material. Além disso, a iteração do concreto com as armaduras e a possibilidade de transmissão de tensões de tração nas faces das fissuras acabam por tornar o problema ainda mais complicado.

O desenvolvimento da teoria conhecida por “Modified Compression Field”, proposta por Vecchio & Collins (1986), ajudou a superar grande parte das dificuldades existentes no processo de simulação de elementos de membrana. Tal avanço se deu devido ao reconhecimento de que o concreto quando submetido à tração ainda é capaz de transmitir tensões residuais nas faces das fissuras. Observou-se ainda que o concreto submetido à compressão não possui o comportamento usualmente detectado num ensaio de compressão simples e que o mesmo deve possuir uma equação constitutiva que leve em conta o efeito de amolecimento devido às tensões transversais de tração.

Com o desenvolvimento da “Modified Compression Field” surgiram teorias alternativas, como a “Softened Truss Model” proposta por Hsu (1993). A referida teoria também utiliza equações constitutivas não-lineares para o concreto e reconhece que o concreto quando submetido à compressão também deve apresentar um certo grau de amolecimento. Apesar das semelhanças, do ponto de vista computacional observa-se que o “Softened Truss Model” apresenta maiores facilidades de implementação numérica, principalmente devido ao fato de não tratar com maior rigor o comportamento na interface das fissuras.

No presente trabalho, procurou-se apresentar a formulação teórica do “Softened Truss Model”, bem como a implementação do método através do programa MEDEA RC_STM. O referido programa foi implementado na plataforma MATLAB e possui uma boa performance, podendo ser utilizado como uma ferramenta versátil para a previsão do comportamento de elementos de membrana.

As simulações efetuadas com o programa MEDEA RC_STM são bastante favoráveis e conforme pode-se observar estão a favor da segurança, isto é, de maneira geral o programa fornece cargas de fissuração e colapso que são ligeiramente inferiores àquelas cargas verificadas experimentalmente. A performance do programa foi verificada através de uma série de resultados experimentais disponíveis na literatura e verificou-se que o modelo é recomendado apenas para painéis armados nas duas direções ortogonais e confeccionados com concretos com resistência à compressão inferior a 50 MPa.

Deve-se observar que o “Softened Truss Model” original vem sendo melhorado ao longo dos anos, conforme atestam os trabalhos de Pang & Hsu (1995), Hsu & Zhang (1997), Hsu (1998) e Zhang & Hsu (1998). No entanto, as evoluções no modelo tornaram o mesmo complicado do ponto de vista computacional, desmotivando a implementação numérica.

Finalmente, do ponto de vista de engenharia, pode-se assumir que os erros cometidos com o modelo original ora aqui implementado são extremamente satisfatórios, uma vez que as limitações a que está submetido o modelo original dificilmente surgirão na prática, ou seja, utilização de concretos com resistência superior a 50 MPa ou ausência de armadura em

uma das direções ortogonais, uma vez que armaduras mínimas sempre são impostas pelos códigos normativos.

AGRADECIMENTOS

O autor gostaria de expressar seu profundo agradecimento ao Cnpq (Conselho Nacional de Pesquisa) e à Fundação Araucária, pelo incentivo e pelo investimento financeiro necessários ao desenvolvimento da presente pesquisa.

REFERÊNCIAS

- Bentz, E.C., Sectional Analysis of Reinforced Concrete Members, PhD Thesis, University of Toronto, Department of Civil Engineering (2000).
- Bhide, S.B.; Collins, M.P., Influence of Axial Tension on the Shear Capacity of Reinforced Concrete Members, *ACI Structural Journal*, v.86, n.5, 570-581 (1989).
- Collins, M. P.; Vecchio, F. J.; Mehlhorn, G., An International Competition to Predict the Response of Reinforced Concrete Panels, *Canadian Journal of Civil Engineering*, v.12, n.03, 626-644 (1985).
- Comité Euro-International Du Béton, CEB-FIP Model Code 1990, London: Thomas Telford Services Ltd. (1993).
- Fialkow, M. N., Compatible Stress and Cracking in Reinforced Concrete Membranes with Multidirectional Reinforcement, *ACI Structural Journal*, v.88, n. 4, July-Aug, 445-457 (1991).
- Gupta, A. K., Combined Membrane and Flexural Reinforcement in Plates and Shells, *ASCE Journal of the Structural Division*, v.112, n.3, 550-557 (1986).
- Gupta, A. K., Membrane Reinforcement In Concrete Shells: A Review, *Nuclear Engineering and Design*, n.82, 63-75, Amsterdam (1984).
- Hoogenboom, P.C.J.; Voskamp, W., Performance-Based Design of Reinforced Concrete Panels on the WWW, In: Proceedings of the 14th International Offshore and Polar Engineering Conference, ISOPE 2004, Toulon, France, May, 23-28 (2004).
- Hsu, T. C. T., Unified Theory of Reinforced Concrete, CRC Press, Boca Raton, Flórida, Estados Unidos (1993).
- Hsu, T. T. C.; Zhang, L. X., Nonlinear Analysis of Membrane Elements by Fixed-Angle Softened-Truss Model, *ACI Structural Journal*, vol. 94, n.5, 483-492 (1997).
- Hsu, T. T., Stresses and Crack Angles in Concrete Membrane Elements, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, vol. 94, n.12, 1476-1484 (1998).
- Kaufmann, W.; Marti, P., Structural Concrete: Cracked Membrane Model, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v.124, n.12, 1467-1475 (1998).
- Lourenço, P. J. B. B.; Figueiras, J. A., Automatic Design of Reinforcement in Concrete Plates and Shells, *Engineering Computations*, v.10, n.06, 519-541 (1993).
- Lourenço, P. J. B. B.; Figueiras, J. A., Solution for the Design of Reinforced Concrete Plates and Shells, *Journal of Structural Engineering*, v.121, n.05, 815-823 (1995).
- Nielsen, M. P., Limit Analysis and Concrete Plasticity, Prentice-Hall Series in Civil Engineering, New Jersey, Englewood Cliffs (1984).
- Pang, X.B.; Hsu, T. T. C., Behavior of Reinforced Concrete Membrane Elements in Shear, *ACI Structural Journal*, v.92, n.6, 665-679 (1995).

Regan, P., *Structural Concrete – Textbook on Behaviour, Design and Performance*, Boletim n°2, v.2, CEB-FIB (1999).

Vecchio, F. J.; Collins, M. P., The Modified Compression Field Theory for Reinforced Concrete Elements Subjected to Shear, *ACI Journal*, v.83, n.22, 219-231 (1986).

Vecchio, F. J.; Collins, M. P.; Aspiotis, J., High-Strength Concrete Elements Subjected to Shear, *ACI Structural Journal*, v.91, n.4, 423-433 (1994).

Zhang, L. X.; Hsu, T.T.C., Behavior and Analysis of 100 MPa Concrete Membrane Elements, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v.124, n.1, 24-34 (1998).